ZENÓN DE ELEA
Y EL INFINITO

ZENÓN DE ELEA
Y EL INFINITO

Por: Julio Morales Guerrero

Zenón de Elea y el infinito

Isbn: 978-958-8742-00-7

Universidad del Atlántico

Rectora
Ana Sofia Mesa de Cuervo

Vicerrector administrativo
y financiero
Freddy Díaz

Vicerrector de docencia
Fernando Cabarcas Charris

Vicerrectora de Investigación,
Extensión y Proyección Social
Rafaela Vos Obeso

Vicerrector de bienestar
universitario
Carlos Bell Lemus

Decano facultad de ciencias humanas
Fidel Alejandro Llinás Zurita

Ilustración de portada
Germán Morales

diseño de portada y páginas interiores
Lobsang Sánchez

Impresión
Universidad Nacional de Colombia

Bogotá, D.C., 2012

Impreso y hecho en Bogotá, D.C.
Colombia

CONTENIDO

CAPÍTULO I

ZENÓN DE ELEA

Las noticias históricas sobre Zenón son, como las que tenemos de la mayor parte de los filósofos presocráticos, fundadas por lo general en conjeturas que los estudiosos del pensamiento antiguo han elaborado a partir de hacer converger referencias y noticias marginales acerca de ellos. De Zenón se sabe que nació en Elea, (Velia), ciudad ésta que según Heródoto[1] fue fundada en el año 540 a 539 a.C. por los focences que habían abandonado Focia a causa de su invasión y destrucción en el año 545. Elea fue organizada en Italia (Enotria) sobre la costa de Lucania al sur de Paestum[2]. Se dice que haber sido visitada por Jenófanes de Colofón, es testimonio de que era una ciudad próspera porque las actividades de Jenófanes de viajero por el Mediterráneo le conducían a sitios en donde le fuera posible percibir buen dinero y de allí se deduce que en Elea pudiera haber una Escuela, pues en aquella época sólo

1 Cf. Heródoto. Los nueve libros de la historia. Libro primero, 164-167. Editorial Cumbre, colec. Los Clásicos, México, 1978. Pág. 65-67.

2 Los datos históricos sobre la escuela de Elea están documentados en la obra *L'Ecole Eleate* de Jean Zafirópulo. París, Société d'édition Les Belles Lettres, 1950.

donde existían sectores económicamente solventes, con tiempo para el ocio, se daban congregaciones de filósofos; éstas se denominaban Escuelas.

De esa escuela de Elea se conocen como principales exponentes a Parménides, Zenón y Melisos porque de ellos han llegado hasta nosotros algunos escritos y otras noticias que así lo confirman; mientras que de otros posibles representantes no se tiene ninguna información, pero sí se sabe que ni Jenófanes ni Gorgias fueron integrantes de ella, como algunos habían sugerido. Sugerencia razonable al tener en cuenta que Jenófanes sostiene como Parménides la doctrina del Ser Uno y justifica que Parménides acuda a la Diosa para que le sea revelada la verdad cuando sostiene que ningún hombre podrá alcanzarla y si alguna vez lo consiguiera no podría saberlo, con lo cual abre paso a las doctrinas escépticas que subyacen a la posición de la sofística adoptada por Gorgias de Leontino. Sobre este punto conviene detenerse en la mención de Platón en el *Sofista* 242d y de Aristóteles en la *Metafísica* A5, 986b-18.

Diógenes establece a partir de Apolodoro que el padre de Zenón se llamó Teleutágoras y aun cuando dice Diógenes que Zenón tenía 40 años en la 79 olimpiada (464-61), Zafirópulo no admite que se establezca así su nacimiento porque sería alrededor del año 500 y entonces contradiría otras conjeturas muy probables que pueden obtenerse de datos como los que da Platón en el *Parménides* y Plutarco, quien dice que Zenón dio clases a Pericles, en concordancia con su venida a Atenas testimoniada por Platón. Zafirópulo concluye que Zenón nació hacia el año 489, unos 25 después de Parménides de quien no se duda que fue su maestro.[3]

J. E. Raven comparte esta datación para el nacimiento de Zenón, refiriéndose al pasaje del diálogo Parménides como un dato cierto, dice lo siguiente:

> Basándonos sobre este testimonio parece probable que Zenón naciera hacia 490-485 a. C. Esta fecha contrasta con la que dio Apolodoro para su *floruit*... La información de Diógenes Laercio, IX 29 (Diels Kranz 29 A 1) es, por desgracia, incompleta, aunque la restauración de la fecha viene indicada

3 Cf. J. Zafirópulo. Op. Cit. p. 162.

> aproximadamente por Suda s. V. Zénon (K. 2A)2…h3 gàr epi1 thç on o1impiádoç (468-465) Xenofánouç h6 Parmenídou. El veredicto de Eusebio (DK 29 A 3) de que su *floruit* tuvo lugar 456-454 a. C., a pesar de que se aproxima, no merece tampoco crédito, por el simple hecho de que le supone contemporáneo de Heráclito.[4]

Platón dice en el *Parménides* (127a) que Zenón era de gran estatura y de apariencia agradable, que además era querido por Parménides. Estrabón[5] informa que Zenón, a instancias de su maestro, asumió el modo de vidapropio de los pitagóricos, pues Parménides, y con él la escuela de Elea, eran una ramificación de la pitagórica. Además, dice Estrabón que Zenón prestó magníficos servicios a su ciudad. Era costumbre que los filósofos participaran activamente en la vida política, incluso en concordancia con esto existe la noticia de que Zenón murió víctima del tirano Nearco. Al respecto hay dos versiones; ambas coinciden en que Zenón participó en una conspiración contra ese tirano, al que también le daban otros nombres. Una versión señala que habiendo sido encarcelado fue torturado para que declarara los nombres de sus cómplices, pero Zenón rehusó dar información y ante los tormentos terminó cortándose la lengua con los dientes y escupiéndola a la cara del verdugo. Otra versión, en cambio, dice que Zenón si admitió dar la información y confesó los nombres de los amigos personales del tirano. En todo caso zafirópulo cree que Zenón debió morir de una muerte violenta y estima muy probable que fuera cerca del año 430.

En relación con los escritos de Zenón, se ofrecen también varias conjeturas. Según las noticias de Diógenes que relaciona Diels en sus fragmentos presocráticos, Zenón habría escrito varios libros cuyos títulos dados por Hesychius, el bibliotecario alejandrino, serían: *Refutaciones, Explicación de las obras de Empédocles, Acerca de los filósofos y Sobre la naturaleza.* Guthrie[6] y Zafirópulo

---

4 Kirk y Raven. *Los filósofos presocráticos*. Versión española de Jesús García Hernández. Madrid, Gredos, 1981. Pág. 400.

5 Estrabón. VI. 1. Citado por Zafirópulo Op. cit. p. 165. Destaca que Jámblico no lo incluye entre los pitagóricos.

6 Guthrie. Dice: "Zenón escribió en prosa. Platón habla como si fuera conocido por una sola obra, y Simplicio se expresa en similares términos. El léxico *Suda* hace mención, al parecer, de cuatro: Disputaciones, Contra los filósofos, Acerca de la Naturaleza (si

dan varias razones para persuadirnos de que esas obras no debieron ser escritas por Zenón, mientras que sí creen que sólo la denominada *Acerca de los filósofos* fuera escrita por él, dado que Platón así lo confirma, y teniendo en cuenta el espíritu polemista de Zenón; además, porque en la época de Zenón se llamaba filósofos a los pitagóricos, contra quienes seguramente iba dirigido el libro. Por otro lado, Zafirópulo cree que "Refutaciones" pudo haber sido escrita por Zenón, pero no existe ningún otro testimonio de ello excepto el de la *Suidas*. El denominado *"Acerca de los filósofos"*, debió contener un buen número de proposiciones (logoi) y Proclo dice que eran 40; de ellas sólo se conocen las que relacionan Aristóteles, Simplicio y Diógenes.

Estos fragmentos de Zenón dan cuenta de una fuerza argumentativa contundente, en razón de la cual desde la antigüedad se extendió su fama de gran discutidor; Platón y Aristóteles coinciden en llamarlo el inventor de la dialéctica.

> La obra de Zenón, sin duda, debe su carácter crítico a la necesidad de polémica que le dio nacimiento: esto hizo decir al buen conocedor de filosofía que era Timón de Fliunte que Zenón poseía una fuerza difícil de destruir y que sosteniendo el pro y el contra de toda cosa encarnaba el censor universal.[7]

La opinión casi unánime respecto de los argumentos de Zenón dice que estuvieron encaminados a sustentar la ontología de Parménides contenida en su poema. Dentro de esa opinión se establecen dos puntos de vista fundamentales, uno de los cuales afirma que Zenón quería probar la imposibilidad del movimiento y el otro afirma que no negaba el movimiento, sino que refutaba la concepción discontinua del Ser, mostrando que si tal concepción se mantenía, entonces el movimiento no podría ser explicado. Entre quienes

---

es que estas dos no representan a un solo título) y unos comentarios a la obra de Empédocles. Las tres primeras podrían ser perfectamente otras tantas denominaciones aplicadas, en época alejandrina, a la misma obra, y es, más bien, dudoso que Zenón escribiera una obra sobre Empédocles, que, precisamente, sólo le es atribuida por esta fuente tardía." Guthrie, W. K. C. *Historia de la filosofía griega*. Tomo II, pág. 94, Madrid, Gredos, 1984.

7 Zafirópulo. Op. cit. p. 172.

sostienen lo primero se encuentran Bertrand Russell y Gregory Vlastos, y lo segundo Jean Zafirópulo. Aquí se examinan esos puntos de vista.

CAPÍTULO II

LAS APORÍAS DE ZENÓN COMO DISPUTA FILOSÓFICA Y COMO CONFUSIÓN CONCEPTUAL

2.1 La discusión de Zenón

Los estudios de Jean Zafirópulo sobre Zenón comparten las conclusiones de Paul Tannery[8] y son expuestos en sus obras *L'Ecole Eléate, Vox Zenonis* y *Apollon et Dionysos*[9] en las cuales, además de presentar cada uno de los fragmentos reconocidos por los doxógrafos como auténticos de Zenón, trata con extensión del contexto en que tuvieron lugar, inscribiéndolos en una polémica entre las sectas pitagóricas ortodoxas y la Escuela de Elea.

Esta polémica es respecto de la concepción pitagórica del Ser que predica de él la discontinuidad, de cuyo punto de vista se ha apartado Parménides, elaborando un discurso paralelo y contrario que concibe el Ser continuo, por

8 Paul Tannery. Pour *l'Histoire de la science helléne*. (1887) París, éditions Jacques Gabay, 1990.

9 Editadas por la Societé d'edition Les Belles lettres de París, en 1950, 1958 y 1960, respectivamente.

consiguiente homogéneo y Uno. Ante dicha ontología parmenídea, se habría generado una reacción por parte de los pitagóricos ortodoxos que pretendían ridiculizarla, pues, según éstos, tenía consecuencias risibles[10]. Como entre los pitagóricos existían quienes sostenían la divisibilidad finita de la materia y también los que admitían su divisibilidad infinita, Zenón debió diseñar argumentos que, partiendo de la hipótesis de la discontinuidad del Ser, mostraran la imposibilidad de explicar, por una parte, el mundo en movimiento, por otra, el mundo en reposo. Por esta razón son cuatro las aporías del movimiento, ya que en ellas se contienen las posibilidades de combinación de las dos hipótesis sobre la divisibilidad del tiempo y del espacio, y en cada uno de esos ejemplos se muestra que el movimiento no puede ser explicado. Zenón mostrará que tampoco el mundo en reposo puede ser explicado partiendo de las hipótesis de la discontinuidad del Ser, y para ello diseña ejemplos en los que sólo hace intervenir el espacio. Son las conocidas aporías contra la pluralidad.[11]

Zafirópulo ha obtenido en total nueve fragmentos de la obra de Zenón, asegurando que ocho de ellos son sin lugar a dudas de Zenón, mientras uno, relativo al sonido, no parece serlo. Estos fragmentos son tomados de la *Física* de Simplicio y de la *Física* de Aristóteles. De Simplicio elogia el esmero con que procuró transcribir los escritos auténticos de Zenón, logrando de ese modo que sea bien claro lo que aquel quiso decir en cada uno de sus argumentos; mientras que de Aristóteles lamenta el modo en que los presenta debido a que con seguridad los ha tergiversado para su conveniencia al refutarlos, siendo la consecuencia que sólo luego de un esfuerzo de interpretación pueda clarificarse el objeto de los mismos y el hilo del razonamiento. Los tomados de Aristóteles son las cuatro aporías del movimiento, conocidas como la dicotomía de la carrera, el Aquiles, la flecha y el estadio, además el denominado del lugar y, finalmente, el del sonido, que, como hemos indicado, duda que sea auténticamente de Zenón.

---

10 Cf. Platón. *Parménides*. 128c-d. Ver más adelante página 17.

11 Jean Zafirópulo. *L'Ecole Éléate: Parménide-Zénon-Mélissos*. Societé d'édition Les Belles Lettres. Paris, 1950. P. 180.

De Simplicio relaciona el argumento contra la pluralidad que concluye mostrando cómo al existir muchas cosas, ellas han de ser a la vez pequeñas hasta no tener dimensión y grandes hasta estar desprovistas de límites; junto a éste, otro argumento contra la pluralidad que muestra cómo al existir muchas cosas han de ser simultáneamente finitas e infinitas en número; y un tercero contra los constituyentes inextensos. Además menciona un décimo fragmento que aparece en Diels, relacionado en Diógenes, el cual dice que *un móvil no se mueve ni en el lugar que ocupa ni en el lugar que no ocupa;* éste último sería otra versión de la aporía de la flecha.

Vamos a mostrar, en resumen, el tratamiento dado por Zafirópulo a cada uno de esos argumentos. Pero antes conviene señalar que este último considera que dichos argumentos buscan demostrar la necesidad de abandonar el lenguaje de la discontinuidad para que sea posible una explicación del mundo tal como aparece a los sentidos, porque las tesis fundamentales que están en disputa son la pitagórica y la parmenídea, las cuales sostienen cosas distintas y contrarias. La tesis pitagórica, según se ha indicado, concibe tanto el Ser como su aparecer discontinuos, y eso obliga a emplear un lenguaje que contenga la discontinuidad, si se quiere ofrecer la descripción del mundo como explicación satisfactoria del mismo.

Por su parte, la tesis de Parménides sostendría: el Ser es esencialmente continuo y sólo su aparecer se ofrece discontinuo, en virtud de lo cual, la descripción satisfactoria del mundo exige abandonar el lenguaje de la discontinuidad, pues éste conduce a la inconmensurabilidad del Ser y el Pensar, tal como lo ha ilustrado el conocido *teorema de Pitágoras* que evidencia la imposibilidad de una medida común para el lado y la diagonal de un cuadrado, debido a que la numerología pitagórica no concebía, por su tesis de las unidades discretas, otro tipo de números que los naturales y las razones entre naturales. Es decir, no concebían una serie numérica que implicara la continuidad; entre un número y otro había una separación.

Partiendo de esta contextualización de los argumentos de Zenón, que refutando la tesis pitagórica conjetura la de Parménides, Zafirópulo ve en cada aporía, como conclusión necesaria, que el lenguaje empleado debe ser rechazado, y con ello se sugiere al menos la necesidad de un nuevo lenguaje que implique la *continuidad* para que pueda ser explicado el mundo; lenguaje éste que, si bien fue sólo sugerido, no se consigue sino después de algo más de 2000 años.[12]

Esta manera de enfocar el análisis permite ver en las mencionadas dificultades de Zenón un problema de tipo lingüístico, pero no lógico o epistemológico; por el contrario, Zenón, al decir de Zafirópulo, ha logrado demostrar un teorema universal sobre el lenguaje que consiste en señalar que los medios de expresión para la descripción de una realidad cualquiera deben estar construidos con arreglo a esa realidad, y si se resiste a ser descrita en un tal lenguaje, éste debe modificarse para adecuarlo a ella, con todas las consecuencias que dicho fenómeno implica para la gnoseología y la concepción de la realidad, pues esta última se modifica en relación con el lenguaje.

Zenón, al demostrar las contradicciones a que conducía la hipótesis de lo múltiple, no demostraba, como lo creía, -dice Zafirópulo- la necesidad de la existencia de lo Uno, ya que para ello debía demostrar lo absurdo de la proposición 'si el Ser no es continuo...' y eso no podía conseguirlo debido a que ambas concepciones, en últimas, se reducían a formas del lenguaje empleadas por el observador. Zenón simplemente estaba empleando el método que hoy conocemos como de reducción al absurdo, por el cual, al demostrar la falsedad de una hipótesis demuestra la validez de su negación pero no una hipótesis con contenidos diferentes al de ésta. Dicho método constituye el fundamental aporte del eléata para la posteridad, además de tener el mérito de indicar para siempre el camino de la investigación respecto de los infinitos que hoy Bertrand Russell denomina cardinal y ordinal, cuyas nociones bastarían para resolver las dificultades planteadas por Zenón, pero que no

---

12 Zafirópulo se refiere a lenguajes que implican la continuidad o la discontinuidad y hasta cierto punto puede ser confuso lo que busque significar con tales expresiones. El sentido en que las emplea se aclara más leyendo su libro *Vox Zenonis*, en donde incluye un capítulo llamado "Los medios de expresión"; en él presenta una tesis según la cual el hombre, para explicar la realidad, se proporciona medios de expresarla que sean adecuados al concepto que de ella tiene y en virtud de esa adecuación, varían tanto el concepto de lo real como el lenguaje; siendo, por ejemplo, el cálculo diferencial e integral uno de esos lenguajes que implican la continuidad.

podían ser bien elaboradas en aquella época a partir de los elementos teóricos disponibles.

No parece justo decir que Zenón creyó demostrar de esa forma la necesidad de la existencia de lo Uno, pues, si estaba de acuerdo con Parménides, entendía que de lo Uno no hay demostración; es una revelación de la diosa. En esta dirección debe verse el siguiente aparte del *Parménides* de Platón:

> Comprendo ahora, Parménides –observó Sócrates– que Zenón no sólo quiere prescindir de tu amistad sino también de tu obra. Es realmente tu propio pensamiento el que repite, aunque por el giro que le da intente hacernos creer que dice otra cosa; pues tu, en tu poema, afirmas que el todo es uno y nos ofreces hermosas pruebas de ello; y él, por su parte, dice que lo múltiple no existe y presenta en tal sentido muchas y muy estimables pruebas. Cuando uno de vosotros afirma lo uno y el otro niega la existencia de lo múltiple, habláis de manera que semejáis no decir lo mismo, aunque poco más o menos afirméis cosas parejas; y es que parece que vuestros discursos están por encima de nosotros. Ciertamente Sócrates -dijo Zenón-, tú no has percibido por entero el verdadero carácter de mi libro. Vas como los perros de Laconia, venteando y siguiendo el rastro de los pensamientos; pero he aquí lo primero que se te pasa inadvertido: que mi libro no se eleva hasta el punto de pretender, como tú supones que fue escrito, que quede oculto a los hombres el gran designio perseguido. Tú hablas, en verdad, de los resultados accesorios, y lo que realmente quiere mi libro es defender la tesis de Parménides contra los que tratan de atacarla, como si de la unidad se dedujesen muchas cosas ridículas y contrarias a su tesis. Replica, pues, este libro a los que afirman lo múltiple y devuelve los golpes con creces, deseando mostrar que aún más ridícula que la hipótesis de la unidad resultaría la de lo múltiple para aquel que siguiese hasta el fin sus consecuencias. Con tal espíritu de porfía fue escrita esta obra en mi juventud, de la que alguien me sustrajo una copia, de modo que no me fue dado poder deliberar si debía o no ver la luz. Te engaña, pues, tu presunción, Sócrates, de que la obra fue escrita no por el ansia de porfía de un joven, sino por la ambición de un hombre de edad. Por lo demás, y esto ya lo he dicho antes, no es inadecuada la imagen que te formes de ella".[13]

13 Platón. *Parménides*. 128c. Madrid, Aguilar, 1981. Obras completas. Pág. 957-958.

Parece que Sócrates creyó que Zenón pretendía demostrar la tesis de lo Uno sostenida por Parménides, ante lo cual Zenón le respondió que no había comprendido enteramente el carácter de su libro, pues Sócrates se ha fijado en lo accesorio. Entiendo en esta afirmación que Platón hace decir a Zenón que al hablar Sócrates del giro que Zenón da al asunto se refiere al método de argumentación de reducción al absurdo, con cuyo recurso cree que pretende demostrar lo Uno, dicha pretensión sería tanto como ocultar el gran *designio perseguido*, consistente en dar a saber que de lo Uno no es posible demostración, pues eso es lo que ha aprendido de la Diosa[14]; por lo demás, tan alta pretensión, (la de demostrar algo que contraría el saber de la Diosa), es propia de un hombre maduro y no de un joven que en realidad sólo pretende disputar obstinadamente a quienes contradicen a su maestro, para mostrar que, si bien la tesis por él sostenida da lugar a risa y es ridícula, más ridícula es la que sostiene lo Múltiple. En ese texto Platón hace decir a Zenón que ambas tesis pueden ser ridículas, y esto está en concordancia con lo expresado por Parménides en su Poema, ya que, en fin, ambas están inscritas, como la Diosa señaló, en las opiniones de los mortales que no contienen la verdadera creencia [en la realidad].

Finalmente, señalamos que dado que este diálogo platónico es tomado como muy probablemente inspirado en un encuentro real con estos personajes, sirviendo de apoyo para establecer su cronología[15], es válido dar crédito también a lo allí expresado por Platón en relación con este asunto.

2.2 La lectura de Las aporías

Para la adecuada comprensión del sentido de cada una de las aporías, Zafirópulo identifica ciertas hipótesis subyacentes, clasificándolas así:

La primera, llamada de la *dicotomía*, supone la divisibilidad infinita del espacio y la divisibilidad finita del tiempo.

14 Cf. Parménides, fragmento VI.
15 Cf. Guthrie. *Historia de la filosofía griega*, vol. II, Pág. 15; G. S. Kirk y J. E. Raven, *Los filósofos presocráticos*. Pág. 263; J. Burnet. *Early Greek Philosophy*. Pág. 169.

La segunda, conocida como *Aquiles* y la tortuga, supone la divisibilidad infinita del espacio y del tiempo.

Para la tercera, de la *flecha*, se asume la divisibilidad finita del espacio e infinita del tiempo.

En la cuarta, del *estadio*, se supone la divisibilidad finita tanto del espacio como del tiempo.

Otra clasificación propone Georges Noel, con la consecuente variación de su interpretación del sentido de cada aporía. Dice lo siguiente:

> Los argumentos de Zenón relacionados por Aristóteles son cuatro y pueden repartirse en dos grupos. Al primero pertenecen la dicotomía y el Aquiles; la flecha y el estadio forman el segundo. En el primer grupo de argumentos, el tiempo y el espacio se suponen continuos y divisibles al infinito; en el segundo, tiempo y espacio se consideran discontinuos y compuestos de elementos indivisibles. Esta distinción, que Renouvier ha sido el primero en poner en claro, no es indicada por Aristóteles, sino que resulta casi con necesidad del texto, por poco que se le lea con atención. Los dos primeros argumentos postulan de manera evidente la divisibilidad indefinida del espacio. Sin duda, el tiempo no es explícitamente considerado; pero la conclusión será ininteligible si no se le considera, igual que al espacio, indefinidamente divisible, pues a la división del uno le corresponde por igual la del otro. Por el contrario, los dos últimos argumentos postulan inmediatamente la indivisibilidad de los elementos del tiempo y mediatamente la de los elementos del espacio. Así considerado, el conjunto de estos razonamientos constituye un verdadero dilema. Dos suposiciones son posibles sobre la naturaleza de la cantidad continua, espacial o temporal: o esta cantidad es, como somos naturalmente inclinados a admitirlo y como los matemáticos lo suponen, efectivamente divisible al infinito, o su continuidad no es más que aparente y es realmente un agregado de elementos indivisibles, un verdadero número formado de unidades absolutas. Ahora bien, tanto en una como en otra de estas hipótesis el movimiento es imposible.
>
> Es verdad que entre las dos alternativas se podría en rigor concebir un término medio. Podría acordarse la infinita divisibilidad del espacio y negarla para el tiempo, o inversamente. Zenón, a juzgar por los textos que han

llegado hasta nosotros, no previó esta escapatoria. Tal vez la consideraba abiertamente ilógica para inclinarse por ella.[16]

Esta última alternativa, como lo acabamos de indicar, es justamente la que propone Záfirópulo en su obra *La Escuela de Elea*, de cuyo análisis nos ocupamos a continuación.

2.2.1 Las cuatro aporías del movimiento

1. Suponiendo el espacio infinitamente divisible y el tiempo no infinitamente divisible, entonces todo movimiento es imposible a causa de la *dicotomía*. Un móvil, en efecto, antes de llegar al término de su curso, debe primeramente efectuar la mitad de su trayectoria y antes de terminar esa mitad debe recorrer a su turno la mitad de ésa y así sucesivamente ad *infinitum*.[17]

Al ser el espacio, por hipótesis, infinitamente divisible, puede obtenerse una infinitud de puntos sobre una porción de la trayectoria escogida arbitrariamente. Tales puntos son unidades reales y distintas puesto que se postuló la discontinuidad, entonces el móvil en su trayectoria deberá sucesivamente entrar en contacto con cada una de esas unidades separadas. Ahora bien, habiéndose supuesto el tiempo no infinitamente divisible, requeriría en la unidad mínima de tiempo efectuar un número infinito de contactos, lo cual es imposible dado que no se dispone para cada contacto más que de un tiempo infinitamente breve, lo que contradiría la hipótesis de la divisibilidad finita del tiempo. Por consiguiente, todo movimiento es imposible. Pero, es evidente que el movimiento tiene lugar; es necesario concluir de esta contradicción que el lenguaje escogido es inadecuado y, por consiguiente, rechazar las definiciones que contiene y las hipótesis que ellas implican[18].

---

16 Georges Noel. « Le mouvement et les arguments de Zénon d'Élée ». P. 107. Revue de Métaphysique et de Morale, 1893, tome 1, pages 107-125.

17 Jean Zafirópulo. *L'Ecole Eleate*, página 180. Paris, Société d'édition Les Belles lettres, 1950.

18 Ibid.

Como puede observarse, Zafirópulo ha tenido cuidado en hacer ver que se postula la discontinuidad, es decir, que un punto está separado de otro que es su siguiente, y ellos son en número infinito; de igual manera el tiempo es discontinuo pero los instantes son en número finito, por consiguiente, un móvil no tiene suficiente tiempo para recorrer todos los puntos de la trayectoria. Si aún siendo el espacio y el tiempo discontinuos pero los instantes fueran infinitos, el móvil alcanzaría su término, como lo indica Bertrand Russell[19].

La contrastación indicada por Zafirópulo "pero es evidente que el movimiento tiene lugar" no puede asignarse a Zenón; más aún, debería pensarse que Zenón al seguir a Parménides y defender la inmutabilidad del ser, no debería apoyarse en ese dato para concluir que debe rechazarse el lenguaje empleado; más bien debería creerse que Zenón está satisfecho con su demostración de que no existe el movimiento. Lo que habría que agregar sería que, en efecto, partiendo de esos presupuestos, el movimiento no existiría, pero podrían surgir otros que permitan dicha explicación sin incurrir en las mencionadas antinomias. Tal ha sido la tarea de la *teoría matemática del infinito y la continuidad* en nuestra época. También cabe concluir que Zenón pone de presente la carencia de un concepto de infinito compatible con la continuidad de las magnitudes reales, como si se tratara de cierta precariedad de la razón para dar cuenta del ser del mundo. En cuyo caso le asiste razón a Parménides para acudir a la divinidad en busca de la verdad.

2. Si el tiempo y el espacio se asumen infinitamente divisibles, supónganse dos móviles recorriendo la misma trayectoria con velocidades diferentes. El móvil más lento parte primero; cuando el móvil más rápido se lance, a su turno, necesitará antes de alcanzar a su concurrente, arribar primero a la posición que aquél ocupaba en el momento en que él (el más rápido) ha iniciado el recorrido. Pero mientras que efectúa ese primer trayecto, su antagonista, continuando su curso, le habría tomado de nuevo otra ventaja. Habrá luego un nuevo punto por el que el más rápido deberá pasar antes de

---

19 Cf. B. Russell. "Nuestro conocimiento del mundo exterior como campo para el método científico en filosofía". Obras completas. Tomo II, (ciencia y filosofía). Pág. 1228. Madrid, Aguilar, 1973.

alcanzarlo y así no alcanzará a su rival, de modo que Aquiles no alcanzará nunca a una tortuga.[20]

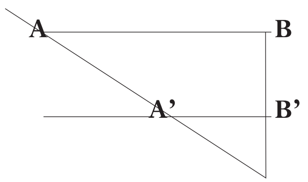
Zafirópulo comenta lo siguiente:

> En efecto la división del tiempo igualmente llevada al infinito, da por definición unidades discretas puesto que hemos admitido la discontinuidad. Y aquí la división del espacio siendo diferencial, llegará siempre un momento donde producirá un infinitamente pequeño en relación con la unidad de distancia que es en cada instante la distancia que recorre el móvil más lento durante la unidad de tiempo escogida, incluso si esta unidad seleccionada es también infinitamente pequeña. Dicho de otra manera, los dos infinitos no son del mismo orden. Se es llevado al caso precedente: es imposible efectuar un número infinito de contactos en un tiempo finito y a *fortiori* en un tiempo infinitamente corto. Luego el móvil más rápido no alcanzará nunca al más lento. Ahora bien, es evidente que lo alcanza, luego el lenguaje escogido para describir el movimiento es de nuevo inadecuado y debe ser rechazado".[21]

Lo aquí dicho, en otras palabras, es más o menos lo siguiente: habiéndose postulado la discontinuidad, es decir, que cada punto de la trayectoria está separado de su siguiente e igualmente los instantes dados de tiempo, para la tortuga hemos establecido infinitos instantes para correlacionar uno a uno con los puntos de su trayectoria y ella recorrerá su distancia pasando de un punto al siguiente en el instante sucesivo, lo que de por sí es problemático ya que cada instante y cada punto tendrían que ser infinitesimal si es que un espacio finito y un tiempo finito están constituidos de infinitos puntos e instantes y estos están separados entre sí, es decir, si se admite la discontinuidad. Si bien Zenón no va a admitir que la suma de infinitas partes, tan pequeñas como se quiera, pueda dar una magnitud finita. El problema radica en que tanto a Aquiles como a la tortuga les estamos dando los mismos infinitos infinitésimos de tiempo, ya que sus carreras son contemporáneas. Mientras que no sucede así con los infinitos infinitésimos de espacio, pues si les damos los mismos, entonces no es cierto que Aquiles vaya a una mayor

20 Zafirópulo. Op. Cit. pág. 181.
21 Ibid, pág. 182.

velocidad que la tortuga, puesto que le estamos asignando en su carrera el mismo infinitésimo de espacio que a la tortuga para cada instante y no la alcanzará porque sus velocidades son iguales y aquella partió con una ventaja, y si Aquiles corre, como se ha supuesto, más velozmente que la tortuga, Aquiles tendría que saltar varios infinitésimos en el instante en que la tortuga sólo cruza uno; pero no es cierto porque para cada punto en que se encuentre la tortuga existe uno y sólo uno de aquiles, de la misma manera que para cada punto de Aquiles se puede establecer uno y sólo uno de la tortuga, lo cual nos lleva a ver que los infinitésimos que asignamos a Aquiles son inexplicablemente más numerosos que los asignados a la tortuga. Esto es ya paradójico porque un infinitésimo es lo *más pequeño imaginable* y no puede haber algo aún más pequeño, como tendría que serlo en este caso; encontramos que Aquiles está recorriendo un *infinito más denso* que aquél de la tortuga.En realidad para Aquiles no hay punto siguiente, ya que entre uno y otro se le establece otro. La situación es la de la siguiente gráfica:



Trayectoria de Aquiles

Trayectoria de la tortuga

Si para cada punto del segmento $\overline{A'B'}$ existe uno y sólo uno de $\overline{AB}$ y también para cada punto de $\overline{AB}$ existe uno y sólo uno de $\overline{A'B'}$, no puede entenderse cómo $\overline{A'B'}$ sea parte propia de $\overline{AB}$, a menos que se admita que la parte $\overline{A'B'}$ tenga tantos elementos como el todo del que es parte $(\overline{AB})$. Fue esto último lo que Zenón no pudo admitir; por consiguiente, Aquiles no podía alcanzar a la tortuga. La teoría matemática del infinito sí admite ese fenómeno, y por eso Aquiles puede alcanzar a la tortuga; es lo que Bertrand Russell ha ejemplificado con su *Paradoja de Tristam Shandy*[22]. La cual dice que si este hombre se dedica a escribir su biografía, empleando un año en narrar los sucesos del primer día de su vida, un segundo año para escribir los sucesos del segundo día de su vida y así sucesivamente, aun cuando nos parezca que cada vez se

22 Bertrand Russell. *Los principios de la matemática*, capítulo XLIII, tomo II página 677. Aguilar, Obras completas, 1973. Ver más adelante página 52.

aleja más de la meta a alcanzar, él la escribirá completa siempre que su vida no acabe, pues, los sucesos del *enésimo* día los escribirá en el *enésimo* año, porque en la eternidad el número de días es igual al número de años.

Se debe notar que aquí se abandona la representación de las dos distancias como acumulado de extensiones mínimas que conservan cada una alguna cantidad aunque ínfima.

3. Suponiendo el espacio no infinitamente divisible y el tiempo divisible infinitamente, entonces una flecha en vuelo está sin embargo inmóvil ya que ella ocupa una cierta posición de la que nunca puede salir. En efecto, siendo el espacio no infinitamente divisible, se exigiría que la flecha pueda "saltar" de una posición a la siguiente sin ocupar posiciones intermedias. Esto es imposible, debido a que el tiempo al ser divisible infinitamente permitiría considerar siempre una infinitud de instantes durante los cuales nuestra flecha no estará ni "aquí" ni "allá", pues no será del todo, lo que es contrario al principio *ex nihilo nihil*, luego el lenguaje escogido es aún inadecuado y debe ser rechazado porque es evidente que la flecha en vuelo se mueve[23]. Esta es en otras palabras, la presentación del argumento de la *flecha* por Zafirópulo.

Esta aporía sería la ilustración de lo expresado en el fragmento tomado de Diógenes, relacionado en Diels como 29 B 4, en el cual Zenón dice que un móvil no se mueve ni en el lugar que ocupa ni en el lugar que no ocupa. Estaría señalando, como dice Russell, que los valores posibles de una variable son siempre constantes[24]; el error estaría, dice él, en inferir que debido a que no existe un estado de movimiento, entonces el mundo sería, en un momento dado como en otro cualquiera, idéntico. Sobre este punto hemos hecho un corto comentario en la presentación de Russell de las opiniones de Zenón[25].

---

23 Zafirópulo. Op. Cit. pág. 183.
24 Cf. Russell. Op. Cit. pág. 671.
25 Ver más adelante pág. 52 y ss.

A propósito de este punto central Georges Noel dice lo siguiente:

Parece que una cantidad no puede ser dada más que de dos maneras: o toda entera a la vez o por fracciones sucesivas. Para el movimiento como para el tiempo, la primera suposición es evidentemente insostenible y Zenón demuestra que no podría admitirse la segunda. Pero, ¿acaso no puede concebirse una tercera? Un examen atento de las dos hipótesis opuestas, más allá de su contradicción aparente, nos revela su profunda identidad. En efecto, las partes que reunimos para formar un todo son, tomadas en sí, cantidades acabadas al mismo título que ese todo. Así las dos suposiciones que hemos distinguido, envuelven una afirmación común. Presentándolas como concebibles por separado, se afirma que la cantidad nos es dada toda de hecho, siempre en acto y jamás en potencia. Uno queda impedido para aplicar a las magnitudes o cantidades la categoría del devenir. De antemano se descarta la noción de una cantidad que se hace, que propiamente hablando no es dada ni en su totalidad ni por partes sucesivas, sino sólo en su ley de formación y, por así decirlo, en germen; que se produce delante de nosotros por un proceso ininterrumpido[26]. Ahora bien, el espacio que recorre un móvil y el tiempo que toma en recorrerlo son precisamente las cantidades de esta naturaleza, y el movimiento no es otra cosa que el devenir de esas cantidades. Así, los razonamientos de Zenón se fundan en último análisis en un postulado no expreso, y este postulado contiene en sí mismo la negación implícita del movimiento. En resumen, los célebres argumentos eleáticos parecen descansar en una petición de principio.

Lo que hace difícil de refutar estos sofismas, es que derivan de una apariencia en cierto sentido inevitable y que tiene su razón de ser en la constitución misma del entendimiento. La hipótesis subyacente a ellos se impone como principio regulador en su uso matemático. Las operaciones matemáticas no tratan sino sobre cantida-

26 Georges Noel, para ilustrar este fenómeno, nos remite a la experiencia ordinaria que tenemos del crecimiento de una planta, sobre la cual podemos fijar nuestra atención ininterrumpidamente y, aunque crece ante los ojos, no podemos percibir su crecimiento; el proceso mismo escapa a la observación. Igual ocurre con un reloj que observamos detenidamente en su marcha sin que podamos percibir el movimiento de sus agujas (me refiero a los relojes analógicos anteriores a los digitales que marchan mediante saltos). No debemos perder de vista que la tecnología digital es una aplicación práctica de las consecuencias de la teoría de la continuidad en matemática; dando cuenta por este medio de fenómenos continuos en términos discontinuos.

des netamente definidas, es decir acabadas. El entendimiento las compone y las descompone; pero no las forma sino de elementos preexistentes y no las resuelve más que en partes que ya contenían. Cómo podría descubrir entre ellas relaciones precisas, inmutables, si no las supusiera inmutables y determinadas. Lo mismo cuando estudia la ley de sus variaciones continuas, debe, al menos provisionalmente, asignar a sus incrementos valores fijos. Es imposible al entendimiento asir la continuidad como tal.[27]

4. Siendo el espacio y el tiempo no infinitamente divisibles, entonces, si hay movimiento el elemento de tiempo deberá necesariamente corresponder al paso del móvil de un elemento de tiempo al siguiente, ya que si recorriera más de una unidad de espacio durante una unidad de tiempo, nos encontraríamos en la dificultad del argumento de la flecha y podríamos considerar un momento en que el móvil no estaría ni "aquí" ni "allá"; luego, no sería, con todas las consecuencias que ello implica. Pero como todas las unidades espaciales son por definición iguales entre ellas y como esta misma igualdad existe también por hipótesis entre todas las unidades temporales, se sigue que si cada unidad de tiempo corresponde al paso de un móvil de una unidad de espacio a la siguiente, entonces todos los movimientos serán movimientos absolutos efectuados a la misma velocidad, a saber, a la velocidad que corresponde al paso de una unidad espacial a la siguiente durante una unidad temporal. Los movimientos relativos se verían entonces excluidos, y no obstante dos tropas marchando en sentido inverso sobre una misma calzada superarán, cada una, en un tiempo dado más unidades espaciales respecto a la tropa que viene a su encuentro que unidades espaciales de la ruta sobre la que ambas se desplazan, lo cual contradice la definición de unidades de tiempo, por consiguiente el lenguaje escogido debe ser nuevamente rechazado, etc[28]. En estos términos nos ofrece Zafirópulo la aporía *del estadio*. Agrega que la conclusión a obtener de esos cuatro argumentos se impone: el lenguaje discontinuo, que admite unidades de magnitud finita o infinita así

27 Georges Noel. « Le mouvement et les arguments de Zénon d'Élée ». Revue de Métaphysique et de Morale. 1893, tome I, page 120.
28 Zafirópulo, Op. Cit. pág. 183.

como una combinación de esos dos géneros de unidades, nunca puede expresar el movimiento y debe por consiguiente ser rechazado como medio de descripción de nuestra experiencia. Necesitamos otras definiciones y otras hipótesis para ceñir la realidad más de cerca.

Pregunta Zafirópulo si Zenón a partir de esas demostraciones concluía que la única posibilidad consistía en admitir objetivamente la *continuidad* mientras que la *discontinuidad*, necesaria a nuestros razonamientos, pertenecía al observador. Tal cosa -dice- parece improbable, ya que de haber obtenido semejante proposición resultaría muy curioso constatar que nadie la hubiera conservado.

Esta conclusión parece ser la que debe obtenerse de la discusión adelantada por Zenón, si es correcto el modo de enmarcarla propuesto por Zafirópulo. Y es justo creer que tal cosa pudo pensar, teniendo en cuenta su carácter de alumno de Parménides y la finalidad que se ha dado a sus argumentos, a saber, defender que el Ser es continuo, Uno, inmutable e indivisible como fue dicho por Parménides en su poema.

Lo que tal vez no haya podido decir Zenón es que debiera describirse nuestra experiencia en un lenguaje del *continuo*, debido a que creía como Parménides que el lenguaje expresa nuestra experiencia, y ésta es la de *"mortales bicéfalos"* que asumen y comprenden el Ser por contrastación, pues no pueden concebirlo sino correlativamente al no-ser, y así en todo lo demás; de donde se desprende que si el Ser fuera continuo, como lo afirma la Diosa en el Poema, no podemos concebirlo de ese modo, ya que sólo por diferenciación a partir del principio de identidad es como podemos pensar cualquier objeto. Aquí conviene ver una anticipación temprana de lo dicho por Alfred North Whitehead: "Así el objeto de los sentidos es el resultado de un proceso activo de diferenciación hecha en virtud del principio de convergencia"[29]. También Descartes había razonado en la misma dirección sobre esta manera de proceder la inteligencia humana, destacando que mediante la acción de

29 Alfred North Whitehead. *La organización del pensamiento*. UNAM: Centro de estudios filosóficos. Cuaderno No. 13. México. 1964. Pág. 31.

diferenciar se va expresando o traduciendo lo desconocido en términos de lo conocido.

De manera que si Zenón pretende argumentar en favor de Parménides, sería paradójico que hablara de un lenguaje del continuo. Incluso puede pensarse que Zenón no elaboró un discurso directo sobre el Ser precisamente porque la ontología de Parménides no se lo permitía; ¿cómo podría él hablar de lo Uno sin introducir Lo que no es Uno? Debió, por consiguiente, asumir un recurso indirecto que le permitiera conjeturar lo Uno razonando, por reducción al absurdo, desde la tesis de la multiplicidad y la discontinuidad, puesto que ella sí está en el ámbito del pensamiento. Es seguramente porque la tesis del Ser Uno y continuo excluye la posibilidad de todo discurso, debido al carácter dual del lenguaje, que Parménides debe acudir al recurso de la Diosa para que sea ella quien exprese el Ser, pues Parménides lo más que puede en su condición de mortal es aventajar a sus congéneres en el marco del lenguaje de la contrastación que introduce la discontinuidad. Con esta óptica podría verse lo dicho por Sócrates en el diálogo *Parménides* de Platón, cuando señala que Zenón y Parménides se refieren a lo mismo y sin embargo 'hablan cada uno por su lado como si se tratara de cosas distintas hasta parecer que hablaran por encima de nosotros'.

Un pensamiento y una actitud análogos volveremos a encontrar en Descartes, para quien el Uno parmenídeo es Dios y del cual no es posible ciencia, pues lo infinito no puede ser abarcado por el pensamiento que queda restringido a los cánones de la lógica, y eso obliga a distinguir una certeza moral, es decir aquella que se obtiene de algo que razonablemente no se podría dudar y otra metafísica que se obtendría por una especie de revelación de la divinidad, frente a la cual es impensable la idea de comprobación o contrastación.[30]

---

30 *Œuvres de Descartes*. Publiées par Charles Adam et Paul Tannery. Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 1996. *Les Principes de la philosophie*. Quatrième partie. 204-206. Volume IX, page 322-324.

2.2.2 Las aporías de Zenón para el mundo en reposo

Por otra parte, continuando con los textos dados por Aristóteles de la antinomia del lugar, dice Zafirópulo que seguramente iba dirigida contra el espacio absoluto obtenido a partir de la acumulación de unidades infinitamente pequeñas, ya que ese espacio no permitía la localización de lo contenido en él. Ese espacio no podía determinarse porque Zenón no admitía que una infinitud de infinitamente pequeños fuera una cantidad finita. La conclusión que Zenón debía sacar de aquí y que no parece haber obtenido, dice Zafirópulo, era que el espacio no podía definirse sino en conjunción de la configuración de los objetos, esto es, si el espacio se considera como entidad compuesta por infinitos puntos, de manera que, por ejemplo, entre los puntos A y B existe una longitud en donde A y B son también entidades actuales, esos puntos, puesto que existen, ocupan a su vez otro espacio y así ad *infinitum*. Esta sería una refutación al punto de vista del espacio absoluto newtoniano. Habría que postular un espacio relacional como lo quería Leibniz para evitar dicha antinomia.[31] Entonces el ejemplo anterior hablaría de dos puntos A y B distantes en virtud de una relación, como la anterioridad o la posterioridad, y no gracias a la mediación de una distancia entendida como cierta entidad, pero ellos en sí mismos no son una relación, es decir, ellos no son espaciales; con lo cual se evitaría la regresión infinita. De esta opinión sobre el espacio se derivaría, entre otras cosas, que las distancias que se dividen no generan una multiplicidad de entes, ya que ellas sólo son relaciones, o maneras de hablar. En este caso al asignar un número a dichas partes, se denota una relación particular, por ejemplo, mitad, cuarta parte, etc. Es decir, la relación en que esa parte se encuentra con la unidad.

El argumento del sonido expresa que si un grano de trigo no hace ruido al caer, ¿cómo se explica que la caída de un montón de granos produzca un sonido audible? Zafirópulo dice que ese argumento por ser tan de poco alcance no parece ser de Zenón, de quien hemos comprobado un alto grado de sutileza y penetración en sus argumentos. Sugiere que más parecería que

---

31 Leibniz expone esta doctrina del espacio como relación y no como entidad en el capítulo XIII de *Nuevos Ensayos sobre el Entendimiento Humano* “Sobre los modos simples y, en primer lugar, los del espacio”.

Aristóteles quiere empañarle la imagen asignándole un razonamiento tan pobre, pues bastaría replicarle a Zenón que así como en otros argumentos se vale de un ojo ideal, aquí debe también valerse de un oído ideal. La única sugestión para creer que ese argumento sea en verdad de Zenón, radica en que Simplicio lo menciona, ilustrándolo con un fragmento de diálogo que tal vez tuvo lugar entre Zenón y Protágoras, pero ese diálogo parece ser apócrifo tanto como el mencionado argumento y, además, es muy probable que Aristóteles se haya servido de la misma fuente de Simplicio aprovechándolo malintencionadamente porque quería ridiculizar a Zenón.

Esta advertencia de Zafirópulo parece pertinente. Pero al margen de la disputa de la autenticidad de ese fragmento, conviene hacer notar que podría verse desde otro punto de vista, en el que estaría dirigido a cuestionar lo que se conoce como el cambio cualitativo producido por el cambio de cantidad, y en tal caso sería equivalente a la paradoja del calvo que fue también planteada desde muy antiguo. Esta paradoja señalaba que si bien quitar un pelo a alguien no lo hacia calvo, ¿cómo podría explicarse que quitando siempre un pelo se llegara a la calvicie? Esta antinomia también se conoce como la del montón de granos de trigo que, aún cuando sustraer uno de ellos no elimina el montón, sin embargo quitando siempre uno éste desaparece.

Desde dicho punto de vista el asunto no parece desprovisto de importancia, pues constituye un problema fundamental para la filosofía. Ya Anaxímenes se había valido de esta explicación dialéctica del cambio al postular el movimiento como lo eterno; Teofrasto dice: *Anaxímenes de Mileto ... Hace también eterno al movimiento, por cuyo medio nace también el cambio*[32]. En efecto, Anaxímenes ha explicado la multiplicidad de los seres como resultante de los cambios de cantidad sucesivos de la sustancia originaria que llamó aire (aħ’r a), los cuales tienen lugar por causa del frio o el calor, es decir, por disminución o aumento de la temperatura. Esta doctrina de la perennidad e igual cantidad de movimiento en el universo será sostenida después por Descartes en

32 Cf. Kirk y Raven. *Los filósofos presocráticos*, página 214. Madrid, Gredos, 1981.

su física, si bien él la explica como una consecuencia de la inmutabilidad de la voluntad de Dios, siguiendo en ello los argumentos de Giordano Bruno.[33]

Desde una perspectiva más contemporánea puede decirse que estas dificultades relativas al tránsito de la cantidad a la calidad abren dos caminos: el del pensamiento especulativo que habla de "saltos dialécticos" y el del razonamiento matemático que introduce la noción de continuidad. Este problema que se ofrece complicado porque relaciona las categorías de cantidad y cualidad, parece ser el mismo que se presenta al demandar la explicación del paso de un móvil de un punto a otro cuando no hay punto siguiente, para cuya explicación se habla del *"paso gradual"* en un intervalo, haciendo corresponder al móvil una posición anterior en un instante anterior, una posición posterior en un instante posterior y posiciones intermedias en tiempos intermedios. Explicación que se funda en la teoría matemática del infinito y la continuidad después de Dedekin y Cantor[34].

Zafirópulo continúa ahora con los argumentos contra la pluralidad y comenta que habiendo demostrado Zenón la imposibilidad de describir con el lenguaje discontinuo el mundo en movimiento, ahora va a demostrar que tampoco puede ese lenguaje describir el mundo en reposo; por eso ya en estos argumentos no hace intervenir el tiempo, pues va a razonar sobre el espacio y sobre nuestras posibilidades de medirlo cuando definimos la distancia como algo discontinuo. Reitera que tal imposibilidad es en virtud de esa definición del espacio como discontinuo y asegura que con un lenguaje de la continuidad esos problemas se resuelven.

Esta solución no es de la forma usual, consistente en que una determinada pregunta encuentra cierta respuesta satisfactoria, que explica los términos y relaciones entre los términos involucrados en la pregunta; aquí se trata de

---

33 Cf. Descartes. *El Mundo. Tratado de la luz*. Capítulo VII. Edición, introducción, traducción y notas de Salvio Turró. Madrid, Editorial Anthropos, 1989. Giordano Bruno. *Sobre el infinito universo y los mundos*. Traducción y notas de Ángel J. Cappelletti. Barcelona, ediciones Orbis, 1984.

34 Ver Henri Poincaré. « Le continu mathématique ». Revue de Métaphysique et de Morale. Tome I, 1893 Pages 26-34. Bertrand Russell. *Introducción a la filosofía matemática*. Capítulo X. Madrid, Aguilar, páginas 1324–1329.

una solución distinta donde no se responde a lo preguntado sino que se hace ver que ya lo que se pregunta no cabe seguirlo preguntando. Esto se comprueba al tener en cuenta que la introducción de la noción de continuidad no hace referencia a la cantidad y su medida, ya que ella es una definición puramente lógica que no tiene ninguna consecuencia ontológica[35]. Las nociones de número, infinito y continuidad que constituyen ese lenguaje del continuo, no tienen nada que ver con ese mundo del que Zenón está preocupado por medir sus distancias.

Zafirópulo comienza aquí elogiando la manera elegante, clara y precisa con que Zenón se dirige a su objetivo:

> ...demostrar que la discontinuidad no puede, en tanto que medida, agotar el concepto de infinito tal como existía en su época, concepto que, bajo la forma de infinitamente grande e infinitamente pequeño, se mantenía entonces necesario para toda descripción de lo real. Aquí todavía toda la argumentación de Zenón reposa sobre una pura cuestión de lenguaje: basta definir cuidadosamente las palabras "infinito" y "medida" para resolver de una vez todas esas aporías.[36]

De estos fragmentos tomados de Simplicio, Zafirópulo ha elaborado un exhaustivo análisis filológico[37] a partir del cual obtiene lo que se cree son los textos auténticos de Zenón, y encuentra en cada uno de ellos la confirmación de su hipótesis acerca de la finalidad de Zenón, quien se hacía irrefutable dentro del lenguaje de la discontinuidad, valiéndose para ello de los supuestos aceptados por los pitagóricos y de algunos usos ambiguos de palabras tales como "medida" e "infinito".

Buena parte del libro de Zafirópulo *L'École Éléate* está dedicada a demostrar que estos fragmentos de Zenón son el resultado de una polémica entre los pitagóricos partidarios de la concepción del Ser como discontinuo y múltiple y los partidarios de la concepción del Ser como continuo y uno. Estaría

---

35 Cf. B. Russell. *Los principios de la matemática*, cap. XLII, pág. 673 y ss. Edición citada.
36 Zafirópulo, Jean. *L'École Éléate*: Parménide- Zénon- Mélissos. Paris, Société d'edition Les Belles Lettres, 1950. Pág. 189.
37 Ver apéndice.

poniendo en claro la imposibilidad de describir nuestra experiencia si nos valemos de un lenguaje que implique la discontinuidad; por consiguiente, es necesario un lenguaje que implique la continuidad.

En lo allí expresado Zafirópulo no ha concluido, como cabría esperarse del planteamiento dado, en el sentido de ser una discusión sobre si el Ser es continuo o discontinuo, que puesto que Zenón demuestra lo absurdo de la tesis que refuta, entonces el Ser no es discontinuo sino continuo, o bien que el Ser no es discontinuo y queda conjeturado y por indagar si ha de ser continuo; en fin, no se decide acerca del Ser luego de dicha polémica, sino que concluye señalando que, en efecto, Zenón tenía razón en sus objeciones porque el lenguaje en el cual se expresaba la tesis de la discontinuidad del Ser no era un lenguaje adecuado, pues encerraba en él los resultados absurdos que Zenón no ha hecho más que poner en claro en virtud de su gran penetración intelectual y lógica, para cuyo objeto se vale además de algunas ambigüedades significativas de términos como aþeiron, aprovechando que en su idioma y en su época esa palabra, como otras, no estaba definida unívocamente.

Conviene subrayar que diversos autores[38] coinciden en estimar así el carácter irrefutable que tuvieron las proposiciones de Zenón, haciendo notar que se trataba de una época en la cual no se disponía de lenguajes técnicos cuyas expresiones gozaran de definiciones precisas no susceptibles de usos ambiguos.

Esta manera de ver el asunto no parece enteramente justa. Por el contrario, deja entrever que los analistas que así opinan estaban embargados por el entusiasmo de los lenguajes unívocos y las certezas que acompañaban a la entonces reciente *filosofía analítica*. Con la firme convicción de que las antiguas disputas filosóficas se desvanecen mediante un cuidadoso análisis del lenguaje, tal vez descuidaron el hecho fundamental de que en últimas se discurría sobre asuntos no lingüísticos, aunque para ello se apoyaran en una herramienta lingüística menos eficiente.

---

38 Georges Noel. «Les arguments de Zénon d'Elée et le mouvement». En: Revue de Metaphisique et morale. Tome. I. Paris, 1893. También Russell. Op. cit. y Gregory Vlastos, de cuyas opiniones tratan los capítulos siguientes.

Se ha pensado que cuando aquellos empleaban el término, (a1peiron), lo hacían con la intención de decir algo semánticamente vacío y lógicamente funcional. Es decir, como si lo emplearan con finalidad idéntica a como hoy emplea un matemático una de las definiciones de infinito. Basta recordar que entre los presocráticos no se concebía un Ser incorpóreo. De otro modo no se comprende porqué Zafirópulo, Tannery, Vlastos, Russell y otros autores que han hecho referencia a los fragmentos de Zenón, tienden a ver sus argumentos fundados en una precariedad lingüística, como si se tratara de un pasado triste donde la humanidad no gozaba del confort expresivo que por fortuna ahora disfrutamos.

En nuestra opinión, no cabe la idea de que el hombre alguna vez haya pensado más cosas de las que haya podido expresar o, inversamente, que haya expresado más de lo pensado. Partiendo de esta asunción, más o menos de sentido común, creemos que el infinito a que se refería Zenón con el término *apeiron* no era distinto del que nombraba.

En suma, la conclusión obtenida es que el lenguaje empleado era autocontradictorio. ¿En qué consistía su carácter autocontradictorio? Gracias al esmero de Zenón en ponerlo de manifiesto, hoy (es decir, desde el siglo XIX y mediante Georg Cantor y Dedekind[39]) sabemos en qué radica dicha inconsistencia. Es de interés destacar que se haya dejado de lado el referente de la discusión, a saber, si el Ser es continuo o discontinuo y en su lugar fue desplazado el análisis a los términos en que se expresaba aquella disputa. Porque con toda evidencia son dos cosas el Ser y el lenguaje que lo expresa. Si nos ocupáramos de continuar la discusión planteada por aquellos griegos, estaríamos dentro de una disputa metafísica en sentido estricto, pero si nos ocupamos del análisis del lenguaje que expresa aquel objeto, estaremos en lo que hoy se conoce como analítica del lenguaje.

Como a partir de la corriente de pensamiento que se conoció como *Positivismo Lógico* se asignó, en su primer momento, a la filosofía el papel de analis-

---

39 Para una idea general de la teoría del continuo de Dedekind y la de Cantor puede verse la exposición resumida que hace de ellas Bertrand Russell en el capítulo X de *Introducción a la filosofía matemática*. Obras Completas, tomo II, Madrid, Aguilar, 1973.

ta del lenguaje, Zafirópulo, consecuentemente ha asumido aquella antigua discusión como si desde entonces se hubiera emplazado en ese ámbito, y la especulación moderna sobre el lenguaje matemático que se hace parte de la Filosofía Matemática ha asumido la paternidad del problema; de donde, para quienes no siendo matemáticos, nos resulte curioso que sea en su ámbito en donde aquella discusión, en su origen ontológica, se pretenda resolver y, por otra parte, para quienes se ocupan de la matemática, resulte más extraño todavía que aquella disputa de la metafísica se resuelva en su dominio, sobre todo cuando se tiene claro que la matemática no es un discurso informativo acerca del mundo.

El tratamiento dado por Zafirópulo al problema puede esquematizarse diciendo que dados dos individuos A y B, quienes discuten acerca de si un objeto tiene la propiedad *x* o por el contrario la propiedad *y*, habiendo B demostrado que el objeto no puede tener la propiedad *x* como lo sostiene A, no obtenemos del resultado de esa discusión ninguna proposición acerca del objeto de la referencia, sino que encontramos como su resultado que A empleó un lenguaje incoherente para afirmar que ese objeto tuviera la expresada propiedad. Esta manera de asumir el problema es, en efecto, más precoz que aquella que ante un tal fenómeno cree que el objeto de la referencia tiene o no tiene, según se concluya, la propiedad asignada sin reparar en la forma de predicación de dicha propiedad; quien así procede, ciertamente procede con suma ingenuidad. Pero de la otra manera, como aquí Zafirópulo, implica la suposición de que a los objetos como tal, si es que los hay en sí mismos, les es indiferente cualquier propiedad y estas últimas no les son intrínsecamente suyas; se trata de saber qué objetos y qué propiedades podrían predicarse sin contradicción lógica. De manera que en una tal discusión lo primero es aclarar qué se entiende por el objeto de la referencia; y como todo objeto se define a partir de la descripción de sus propiedades, entonces la atención debe centrarse en la descripción lógica de dichas propiedades para garantizar de ese modo la no existencia de objetos autocontradictorios que se resisten a ser descritos; por consiguiente, todo objeto resulta por una construcción lógica desde un lenguaje y gracias a ello se podría, en ese mismo lenguaje, predicar acerca de sus relaciones con otros objetos y decidir sobre su existencia por la validez de los predicados respecto de él.

De acuerdo con lo anterior, es viable este ejemplo: ante la afirmación de que los peces del océano Atlántico vuelan por las noches hacia el océano Pacífico, sin que sea preciso trasnochar para verificar esta aseveración, se verifica su falsedad al conocer la definición de peces.

Señalemos que esta es la concepción de la realidad de la ciencia contemporánea:

> La realidad no nos es dada pero nos es propuesta bajo la forma de devenir. Esto quiere decir: existe alguna cosa como una construcción conceptual para la inteligencia de lo que es interpersonal, la justificación de esta construcción reside enteramente en su validez. Esta construcción conceptual se refiere precisamente a <u>la realidad</u> (por definición) y toda otra cuestión concerniente a la <u>naturaleza de lo real</u> parece vacía de sentido”[40]

De ese modo la ciencia se entrega a su tarea con objetos claramente definidos sin lugar a ser sorprendida por problemas de orden ontológico, pues si la experiencia se empeñara en contrariar lo concebido como real, diremos que es preciso abandonar esas definiciones, cambiando el lenguaje empleado, lo que en otras palabras sería estar ante una revolución científica. Sería eso lo que, según Zafirópulo, habría mostrado Zenón; debido a ello tras cada revolución teórica en la historia de la Física, Zafirópulo escucha el eco de la voz de Zenón; eso es su libro *Vox Zenonis*. Cuando esa construcción conceptual de que habla Einstein es tal que permite dar razón de toda experiencia posible, por la tranquilidad emocional que provoca adquiere un especial valor estético y nos aferramos a ella en tal grado que si se nos dijera que dicho sistema no responde a la “realidad” podemos, en primera instancia, responder que ‘lo lamentamos por ella’.

En esta perspectiva nos encontramos con que los llamados problemas objetivos no son realmente del objeto, sino de orden lógico y más estrictamente lingüísticos, pues, por definición, se refieren al lenguaje que expresa la realidad así concebida, y de aquí se desprende que los problemas planteados por

---

40 Albert Einstein. *Living philosophers*. Evanston. 1949. Pág. 680. Citado por J. Zafirópulo en *Apollon et Dionysos*. París, Société d’edition “Les Belles Lettres”, 1960.

Zenón no sean de orden lógico ni epistemológico, sino lingüísticos, como lo ha expresado Zafirópulo; porque el lenguaje discontinuo de los pitagóricos no permitía describir nuestra experiencia.

Habiendo indicado que Zafirópulo, a partir de esa concepción epistemológica arriba mencionada, ha situado el objeto de la discusión de Zenón en torno al lenguaje, podemos procurar poner en claro qué inconsistencias puso de manifiesto Zenón en aquel lenguaje y cómo hoy se ha introducido uno nuevo con definiciones adecuadas para evitar aquellas inconsistencias, haciendo la salvedad que la discusión llamada ontológica en que estaban empeñados pitagóricos y eléatas, la abandonamos.

La noción de discontinuidad inmanente a la concepción pitagórica del mundo, implica una visión del espacio y del tiempo granular, que concibe un segmento como constituido por partes yuxtapuestas, separadas una de otra, las cuales podrían ser enumeradas con los números naturales, de manera que al dividir sucesivamente un segmento obtenemos partes cada vez más pequeñas, y podría pensarse que cualquier segmento puede ser expresado en términos de un número determinado de secciones de otro, haciendo valer estas secciones como unidades últimas; esas eran las llamadas por los pitagóricos partes *alícuotas*; así un segmento cualquiera podía estar dado por un número determinado de mitades, tercios, etc., de otro. Sin embargo, se descubrió que tal cosa no era posible si se trataba de expresar la diagonal de un cuadrado en términos del lado, ya que ninguna fracción de este último podía encontrarse como parte alícuota para expresar esa diagonal:

> La prueba pitagórica es a grandes trazos como sigue. Si es posible, supongamos que la relación de la diagonal con el lado de un cuadrado sea m/n donde *m y n* son números enteros sin factor común. Entonces, tendremos que $m^2 = 2n^2$ [41]. Ahora bien: el cuadrado de un número impar es impar, pero m^2 al ser igual a $2n^2$, es par; m, pues, debe ser par. Pero el cuadrado de un número par es divisible por 4; por tanto, n^2 , que es la mitad de m^2

41 Con la expresión $m^2 = 2n^2$ Russell está enunciando el Teorema de Pitágoras: *el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados que se construyen sobre los otros dos lados,* en este caso de igual longitud n.

> debe ser par. Por consiguiente, *n* debe ser par. Pero, puesto que *m* es par y *m* y *n* no tienen factor común, *n* debe ser impar. Así pues, *n* debe ser a la vez par e impar, lo cual es imposible; por consiguiente, la diagonal y el lado no pueden tener una relación racional[42].

Esta inexistencia de una medida común para el lado y la diagonal de un cuadrado, ponía de manifiesto que si una longitud está compuesta de puntos, su número ha de ser infinito. Zenón mostrará que esa noción de divisibilidad infinita relativa a la discontinuidad produce antinomias, pues es eso lo que expresan las conocidas aporías.

Las antinomias de Zenón fueron, al parecer, refutadas por Anaxágoras, quien introduce la noción de infinitos de "distinto orden" y sería él quien ofrece primeramente la idea de infinitesimales como lo infinitamente pequeño para explicar el hecho que Zenón señala como paradójico de que toda cosa sería infinitamente grande y a la vez tan pequeña hasta no tener extensión. Anaxágoras dice: "ni en lo pequeño existe límite de pequeñez, sino que siempre hay algo más pequeño (porque no es posible que el Ser no sea), pero también en lo grande siempre hay algo mayor y este es igual a lo pequeño en cuanto al número; en relación consigo mismo, todo es a la vez grande y pequeño"[43].

Refiriéndose a estas dificultades de la noción de infinito, dice Russell:

> Una característica de las colecciones infinitas es la de ser incontables y es la fuente de muchas cualidades paradójicas. Tan paradójicas son estas cualidades que hasta nuestros días se creyeron contradicciones lógicas. Una larga serie de filósofos desde Zenón hasta Bergson, han basado gran parte de su metafísica en la supuesta imposibilidad de colecciones infinitas. Puede decirse que las dificultades fueron propuestas por Zenón sin que se añadiera nada esencial hasta Bolzano en su obra *Paradoxien des Unendlichen*,[44] un

42 Bertrand Russell. El problema del infinito considerado históricamente. Nota No. 7. Obras completas. T. II, pág. 1224.

43 Fragmento 3 de Anaxágoras. Simplicio, Phys., 164-7.

44 Existe traducción castellana de esta obra. *Las paradojas del infinito*. México, UNAM, 1991. Traducción del alemán de Luis Felipe Segura. 146 p.

pequeño trabajo escrito en 1847-1848 y publicado en 1851, tras su muerte. Los intentos intermedios para tratar el problema son fútiles y pueden ignorarse. La solución definitiva de las dificultades no se debe a Bolzano sino a George Cantor cuya obra sobre este asunto apareció en 1882 por primera vez.[45]

45 Bertrand Russell. *Nuestro conocimiento del mundo exterior*, pág. 1225. Obras completas. Tomo 2.

CAPÍTULO III

LA SOLUCIÓN DE RUSSELL A LAS APORÍAS DE ZENÓN: LA DEFINICIÓN POR COMPRENSIÓN Y LA TEORÍA DE LAS DESCRIPCIONES COMO CAMINO ALTERNO

Los argumentos de Zenón han sido tratados por Bertrand Russell en diferentes partes de sus escritos pero no ocupándose de ellos en forma directa, sino para ilustrar la exposición de los problemas que han estado vinculados a las nociones de infinitesimal, infinito y continuidad, pues tales son, dice Russell, los asuntos implicados en las dificultades (aporías) planteadas por Zenón. Estos lugares en que trata de dichos argumentos con alguna extensión son: *Los Principios de la matemática en el capítulo* XLII (L*a Filosofía del continuo)* y el capítulo XLIII *(La filosofía del infinito); Misticismo y lógica,* en el cpítulo V *(Los metafísicos y las matemáticas)*; *Nuestro conocimiento del mundo exterior,* en la conferencia V *(La teoría de la continuidad)* y en la conferencia VI (*El problema del infinito considerado históricamente)*. Es en esta última conferencia en donde nos presenta una disertación más amplia y sistemática sobre las cuatro aporías del movimiento y uno de los argumentos contra la pluralidad.

En consecuencia, aquí la tomaremos como el referente principal de nuestra exposición de las opiniones que a Russell le merecen esas aporías de Zenón.

En este texto comienza señalando que a pesar de los diferentes puntos de vista acerca de lo que se cree quiso expresar Zenón, se puede afirmar lo siguiente:

> [Él] ansía probar que el movimiento es realmente imposible y que desea demostrarlo porque sigue a Parménides en la negación de la pluralidad ... Que los argumentos tercero y cuarto versan sobre las hipótesis de los indivisibles (...) Respecto a las dos primeras aporías parecerían ser válidas en la hipótesis de los indivisibles e incluso sin esta hipótesis lo serían, en el caso de que las tradicionales contradicciones de los números infinitos fueran insolubles, que no lo son... Podemos, pues, concluír que la polémica de Zenón se dirige contra la opinión de que el espacio y el tiempo constan de puntos e instantes; así mismo concluiremos que como dirigidos contra la opinión de que una extensión dada de espacio o tiempo consta de un número finito de puntos e instantes sus argumentos no son sofismas, sino perfectamente válidos... La conclusión que Zenón quiere que saquemos es que la pluralidad es un engaño y que los espacios y los tiempos son realmente indivisibles. La conclusión posible, a saber, que el número de puntos e instantes es infinito, no era sostenible mientras el infinito estuviese erizado de contradicciones.[46]

El argumento de Zenón contra la pluralidad dice lo siguiente:

Si las cosas son muchas, deben ser precisamente tantas como son, ni más ni menos. Ahora bien: si son tantas como son, serán finitas en número.Si las cosas son muchas serán infinitas en número; porque siempre habrá otras cosas entre ellas y otras de nuevo entre éstas. Por lo tanto, las cosas son infinitas en número[47]

---

46 Russell, Bertrand. El problema del infinito considerado historicamente. En:Nuestro conocimiento del mundo exterior como campo para el método científico en filosofía. Obrascompletas. Tomo II, ciencia y filosofía. P. 1228. Madrid, Aguilar, 1973.

47 Simplicius:*Física*, 140, 28 D (R. P. 133); Burnet *Early Greek Philosophy* (2° edición, Londres, 1908), pág. 364-65.Citado por Russell, Op. cit., pág. 1228.

La paradoja pretende probar que sólo hay una cosa ya que de ser muchas serían finitas e infinitas a la vez. Russell dice que el error de Zenón consiste en afirmar que "si son tantas como son serían finitas en número", puesto que presupone la imposibilidad de números infinitos definidos, y tal imposibilidad hoy se ha demostrado que es falsa.

Podemos preguntarnos por qué Zenón afirma que al ser tantas cosas como son deben ser finitas en número. Es evidente que Zenón no concibe la posibilidad de definir un conjunto (clase) de otro modo que mencionando (enumerando) cada uno de sus elementos, por eso decir que son tantos implica haberlos enumerado. Ese modo de definir un conjunto es el hoy denominado *extensional*, y se sabe que existe otro medio de lograr tal definición que consiste en dar una propiedad común a todos los miembros del conjunto a definir de manera que cualquier elemento cumple o no cumple dicha propiedad, y así pertenece o no pertenece a la clase definida por la propiedad enunciada, quedando bien *determinados* cuáles son los elementos de la clase sin recurrir a un conteo o enumeración de cada uno de ellos; operación que no podría efectuarse en el caso de conjuntos con infinito número de elementos. Esta definición de conjunto por comprensión es la que ya Bernard Bolzano presentó en su libro *Las paradojas del infinito:*

> Existen agregados que, a pesar de contener los mismos elementos A, B, C, D,… se presentan como algo distinto (algo *esencialmente* distinto en nuestra terminología), de acuerdo con el criterio (concepto) a partir del cual son considerados precisamente como agregados. Un vaso entero y un vaso roto en pedazos, por ejemplo, tomados ambos como un recipiente utilizado para beber. Llamamos t*ipo de relación (Art der Verbindung)* o de ordenación de sus elementos a aquello que constituye el fundamento por el que estos agregados son diferentes. Llamamos *conjunto* a un agregado que depende de un concepto respecto al cual el orden de sus elementos es indiferente (relación en la que, por lo tanto, no hay una modificación esencial para nosotros cuando el orden se modifica). Una multiplicidad de A es un conjunto cuyos elementos pueden ser considerados como objetos de un cierto tipo A; es decir, como objetos que dependen y se encuentran sujetos a un concepto A.[48]

48 Bernard Bolzano. *Las paradojas del infinito*. §4. México, UNAM, 1991, p. 41.

Se dirá que esta operación de *contar* sí es posible aún en conjuntos con infinito número de elementos, tal es el caso de los conjuntos infinitos enumerables. Pero debe anotarse que lo es sólo después de obtener algún conjunto de infinito número de elementos por una definición comprensional; por ejemplo, los números naturales obtenidos a partir de algunos términos primitivos y definiciones como la inducción; de donde es correcto afirmar que ningún conjunto con un número infinito de elementos puede obtenerse por enumeración sin hacer intervenir una definición *comprensional* de conjuntos. Esto se reduce a decir que sólo una teoría de la denotación que implique la definición de conjuntos por comprensión, permite tratar de dichos conjuntos infinitos. Este tipo de definición constituye el fundamento de la matemática, pues permite discurrir sobre clases con infinito número de elementos. Pero esta definición comprensional se sustenta en una teoría gnoseológica que señala cómo todo conocimiento de objetos consiste en una descripción de propiedades que asignamos a dichos objetos, a cuya teoría nos referiremos posteriormente.[49]

El primer argumento contra el movimiento, conocido como el de la dicotomía, es el siguiente:

> No puedes llegar al final de la carrera. No puedes atravesar un número infinito de puntos en un tiempo finito. Tienes que atravesar la mitad de una distancia dada antes de atravesar el todo y la mitad de la mitad antes de atravesar ésta. Esto prosigue *ad infinitum*, puesto que hay un número infinito de puntos en cualquier espacio dado y tú no puedes tocar un número infinito de puntos uno a uno en un tiempo finito.[50]

Russell hace notar que en la presentación que Aristóteles da de esta aporía, según la cual Zenón arguye no poder tocar todos los puntos de la distancia uno a uno, se establecen dos sentidos de la infinitud de los puntos:

49 Ver página 54.
50 Burnet: Op. cit., pág. 367. Citado por Russell. Op. cit., pág. 1228.

1. Entendiéndose que cualquier distancia tiene infinitos puntos debido a que entre uno y otro hay al menos otro punto, por consiguiente infinitos. Se trata de la forma de infinitud de los números racionales.

2. Entendiéndose que como resultado de las sucesivas divisiones de las mitades por recorrer, se obtendrán infinitos puntos. Se trata de la infinitud de los números naturales.

Para el primer caso, habría que decir que en efecto no pueden ser tocados uno a uno, pues requeriría el corredor tocar un punto y luego el siguiente, pero no habiendo allí punto siguiente, éste no podrá tocarlos uno a uno. En el segundo caso sí podrá tocarlos uno a uno y alcanzarlos en un tiempo finito. Para que no pueda alcanzarlos habría que agregar la suposición de que un tiempo finito estaría constituido por un número finito de instantes.

Russell añade que podemos ver la aporía dirigida contra los que sostienen la divisibilidad infinita y en tal caso ella diría:

> Los puntos obtenidos por la bisección sucesiva de las distancias por recorrer son infinitos en número y son alcanzados sucesivamente, cada uno en un tiempo finito más tarde que el anterior; mas la suma de un número infinito de tiempos finitos debe ser infinita y por tanto el proceso no acabará nunca.[51]

En tal caso -dice Russell- es falso el argumento ya que la suma de los elementos de una sucesión infinita que tiene límite es finita. Es el caso de la sumatoria de 1/2, 3/4, 7/8, 15/16... que no es mayor que 1. Este argumento sería exactamente el de Aquiles, que apoyándose en el supuesto de que infinitos instantes constituyen un tiempo infinito, concluye que la tortuga no será alcanzada por Aquiles dado cualquier tiempo de competencia.

El argumento tercero, de la flecha, dice:

---

51 Russell. Op. cit., pág. 1229.

La flecha durante su vuelo está en reposo. En efecto: si todo lo que ocupa un espacio igual a sí mismo está en reposo y lo que se encuentra en vuelo ocupa siempre, en cualquier momento dado, un espacio igual a sí mismo, la flecha no puede moverse.[52]

Russell comenta que aquí Zenón supone que un tiempo finito consta de un número finito de instantes sucesivos, y habiendo un instante siguiente a cada uno, concluye que la flecha no dispone de tiempo para moverse ya que en cada instante, puesto que éste no tiene partes, la flecha está quieta en el espacio correspondiente. En otras palabras, en cada instante constituyente del tiempo dado, la flecha está inmóvil ya que requeriría, para moverse dentro del instante, que éste tuviera partes, y no ha de tenerlas puesto que no sería uno sino varios instantes, como en cada uno no se mueve y el tiempo dado no contiene más que los instantes, la flecha estará quieta en cualquier instante.

Russell es conforme con esta apreciación de Zenón en el sentido de que la flecha en cada instante está donde está, inmóvil, porque no existe un tal estado de movimiento. Pero si queremos explicar el tránsito de la flecha de un punto a otro durante un tiempo, debemos abandonar la idea de instantes y puntos sucesivos y acudir a la noción de continuidad.

El cuarto argumento sobre el movimiento, dice Russell que es válido en cuanto contradice la asunción de que un tiempo finito consta de un número finito de instantes, y lo presenta así:

> Supongamos tres sargentos, A, A' y A'', de pie y en fila, mientras que dos filas de soldados marchan ante ellos en direcciones opuestas. En el primer momento que consideramos, los 3 hombres B, B' y B'' en una fila y los 3 hombres C, C' y C'' en otra están a los lados y a la misma altura de A, A' y A''. En el momento siguiente cada fila se ha movido y B y C'' se hallan a la altura de A'. Por tanto B y C'' están a la misma altura.

52 Ibid. Pág. 1230.

Primera posición	Segunda posición
B B’ B”	B B’ B”
. . .	. . .
A A’ A”	A A’ A”
. . .	. . .
C C’ C”	C C’ C”
. . .	. . .

> Cuándo entonces cruzó B a C’? Ha debido ser en algún momento entre los dos que hemos supuesto consecutivos y por lo mismo esos dos momentos no han podido ser en realidad consecutivos, se sigue, pues, que debe haber otros momentos entre dos momentos dados y que, por consiguiente, debe haber un número infinito de momentos en cualquier intervalo de tiempo dado.[53]

Sin embargo, esta auténtica dificultad no es -dice Russell- la que Zenón plantea; él pretende demostrar que “la mitad de un tiempo dado es igual al doble de ese tiempo” como lo indica Aristóteles. El argumento en esencia consiste en mostrar que si el tiempo está constituido por una serie de instantes consecutivos y el movimiento consiste en pasar a través de una serie de puntos consecutivos, entonces no pueden explicarse los movimientos con velocidades distintas, pues el más rápido sería el que hace corresponder al móvil en el instante siguiente el punto siguiente. Los movimientos más lentos implicarían que el móvil permanezca en un mismo punto durante más de un instante y si hubiera uno más rápido, tendría que saltar varios puntos en un instante. Pero en el caso planteado en que hay igual número de A, de B y de C, B cruza en cada instante un A y de ese modo el número de A cruzados es igual al número de instantes transcurridos; de la misma manera se relacionan los C con los A, sin embargo el número de A cruzados es la mitad del número de C sin que pudiera cruzar más de uno en cada instante. Finalmente Russell concluye:

> Hemos visto que todos sus argumentos son válidos (con ciertas hipótesis razonables) si se admite que los espacios y los tiempos finitos constan de un número finito de puntos e instantes; el tercero y el cuarto casi con segu-

53 Ibid. Pág. 1231.

> ridad partieron de ese supuesto, mientras que el primero y el segundo, tal vez encaminados a refutar el supuesto contrario, eran en tal caso falaces. Podemos, pues, evitar sus paradojas o bien manteniendo que, aunque el espacio y el tiempo consten de puntos e instantes, su número es infinito en cualquier intervalo finito, o bien negando que el espacio y el tiempo consten de puntos e instantes, o, finalmente, rehusando toda realidad al espacio y al tiempo.[54]

Según Russell, Zenón evitó esas aporías asumiendo la última alternativa, es decir, negando la realidad del tiempo, en cuyo caso apoyaba la opinión de Parménides sobre la inmovilidad del ser. Nosotros la evitaríamos asumiendo la primera alternativa, es decir, que estando el tiempo y el espacio constituidos de instantes y puntos, el número de ellos es infinito en cualquier intervalo finito. Lo que implica disponer de la contemporánea teoría del continuo matemático para con ella cambiar la suposición de que la parte es mayor que el todo y aceptar su equinumerosidad.

En pocas palabras podemos plantear la cuestión así: si se concibe una extensión dada de espacio y de tiempo constituida por un número finito de puntos e instantes, caemos en las paradojas de Zenón; si esos espacios y tiempos están constituidos por un número infinito de puntos e instantes, entonces estaremos a salvo de esas paradojas. Es precisamente esto último lo que consigue la teoría matemática del infinito, pues afirma que cualquier extensión de espacio o tiempo dados están constituidos por un número infinito de puntos e instantes y se desvanecen las dificultades planteadas por Zenón. Pero tal afirmación conduce a nuevas paradojas que hasta cuando no fueron puestas en claro por Cantor no lograron poner fin a la disputa sobre los argumentos de Zenón. Tal es la opinión de Russell con la cual parece están de acuerdo todos los que conocen la teoría matemática del infinito. La asunción de que cualquier extensión finita de espacio o de tiempo está constituida por un número infinto de puntos o instantes, daba lugar a la paradoja de que la parte fuera tan numerosa como el todo del que es parte, pero esta dificultad -nos dice Russell- no resultó ser de orden lógico sino en

54 Russell. Op. cit., pág. 1232.

relación con nuestros hábitos mentales, mientras que no admitirla implicaría no poder fundamentar lógicamente la matemática.

Russell, consecuentemente, ha diseñado una paradoja correlativa a la de Aquiles que ha denominado de Tristam Shandy, quien tardó dos años en escribir la historia de sus dos primeros días de vida y si continúa escribiendo su biografía en ese ritmo, logrará terminarla siempre que viva eternamente, debido a que el número de días de la eternidad, si bien es parte del número de años, no es menor que este último; la siguiente es la presentación lógica que Russell da de ambas paradojas:

1.
  a. Para cada posición de la tortuga existe una y sólo una de Aquiles; para cada posición de Aquiles existe una y sólo una de la tortuga.
  b. Por lo tanto, la serie de posiciones ocupadas por Aquiles tiene el mismo número de términos que la serie de posiciones ocupadas por la tortuga.
  c. Una parte tiene menos términos que un todo en el que esté contenida y con el que no sea coextensiva.
  d. Por tanto, la serie de posiciones ocupadas por la tortuga no es una parte propia de la serie de posiciones ocupadas por Aquiles.
2.
  a. Tristam Shandy escribe en un año los acontecimientos de un día.
  b. La serie de los días y de los años no tiene último término.
  c. Los acontecimientos del *n-ésimo* día se escriben en el enésimo año.
  d. Cualquier día dado es el enésimo, para un valor conveniente de n.
  e. Por lo tanto, él escribirá en cualquier año dado.
  f. Consecuentemente, no quedará sin escribir ninguna parte de la biografía.
  g. Como existe una correlación biunívoca entre los tiempos de los acontecimientos y los tiempos en que se escriben, y los primeros son parte de los últimos, el todo y la parte tienen el mismo número de términos.[55]

Russell dice que con esta paradoja demuestra que la parte tiene el mismo número de términos que el todo. Pero ésta no me parece una demostración

---

55 Russell. Los principios de la matemática. Cap. XLIII *La filosofía del infinito*. Obras Completas T. II, p. 677.

sino una sugestión. Es necesario que ***n*** sea infinito para que pueda demostrarse lo propuesto y es evidente, por la misma definición de infinito, que n no podrá hacerse infinito; pienso que ***n*** podrá hacerse tan grande como se quiera pero eso no prueba que el número de días y de años sea el mismo en un tiempo dado. Más aún, veo que con ese procedimiento Russell justifica a quienes critica por extender sus hábitos en el manejo de los números finitos a los infinitos.

En el capítulo XLII de *Los Principios de la matemática,* Russell se refiere a los argumentos de Zenón contra el movimiento mostrando el problema particular que cada uno de ellos plantea. El primer argumento ilustra la imposibilidad de definir extensionalmente los conjuntos infinitos debido a que en tales definiciones las partes son lógicamente prioritarias respecto del conjunto o clase a que pertenecen y no pudiéndose enumerar cada una de ellas, nos vemos en una regresión infinita que no permite obtener la *clase* como un todo, por consiguiente, la solución a dicha dificultad está en la definición comprensional de la *clase* ya que en el concepto *'clase'* están implicados todos los miembros de la misma. El segundo argumento al conformar una correlación biunívoca de los elementos de la parte con los elementos del todo al que pertenecen, ilustra la característica esencial de las clases infinitas que consiste en tener partes equinumerosas con el todo del que son partes. El tercer argumento señala que todos los valores que puede asumir una variable son constantes. El cuarto argumento dice que todo movimiento lo es en relación con algo que se considera quieto, lo que en otras palabras expresa la ley de La Place.

Como vemos, la teoría matemática del infinito proporciona una respuesta a las dificultades propuestas por Zenón, permitiéndose una explicación coherente de ciertos hechos como ese del movimiento. Pero, curiosamente, no concluye indicándonos cómo un corredor pasa de un punto a otro, sino señalando que no existe un *estado de movimiento* y por consiguiente no hay una explicación de tal estado; lo que puede decir es que un móvil al ocupar un punto y luego otro punto, habiendo estado en los tiempos intermedios en posiciones intermedias, se ha movido. Aquí debemos observar un cambio de perspectiva epistemológica.

En esta manera de plantear el problema Zenón y de abordarlo la matemática debe resaltarse la diferencia procedimental. La dificultad suscitada por Zenón ante sus oponentes es en torno a la explicación de *lo que es* el movimiento en tanto entidad, mientras que la teoría física no se interesa por tal hecho en sí mismo, sino que describe un estado de cosas a las cuales se denomina movimiento. En otras palabras podemos señalar ésto diciendo que en el planteamiento original de Zenón nos encontramos con la pretensión de dar razones sobre la esencialidad de un hecho del mundo, mientras que en la solución matemática se pretende describir cómo se relacionan varias circunstancias, las cuales, tomadas en conjunto, reciben el nombre de movimiento. Por eso se explica, como lo indica Russell[56], que para Zenón y sus contemporáneos al no existir un estado de cambio, supusieran imposible el cambio continuo, para cuya explicación se habían introducido los infinitesimales. Es ese, según Russell, el único error de Zenón: "inferir, si lo infirió, que puesto que no hay nada semejante a un estado de cambio, por consiguiente el mundo se halla en el mismo estado en un tiempo cualquiera como en cualquier otro"[57]

Pero éste no ha sido simplemente un error de Zenón sino el modo de comportarse el entendimiento a lo largo de casi toda la historia de nuestra cultura; para que algo sea es necesario que tenga ser, y precisamente parece que buscar en esa perspectiva ha sido la filosofía en tanto ontología. El punto de vista que apartándose de ese lo considera un error, constituye una perspectiva gnoseológica que estima la esencia como una quimera puesta por el entendimiento y aborda el mundo en su aparecer fenoménico para describir su operatividad, lo cual constituye el conocimiento. Es este el fundamento del saber científico que se erige como el conocimiento en general y cuya clara expresión la encontramos ya en Descartes cuando rechaza las formas substanciales como quiméricas e inexistentes.

El punto de partida de esta construcción consiste en la asunción de que todo conocimiento de objetos es una descripción de las propiedades que, a par-

---

56 Russell. *Los principios de la matemática*. Obras completas, tomo II. Parágrafo 333, pág. 672. Edición Aguilar, Madrid, 1973.

57 Russell, Bertrand. Misticismo y lógica, cap. V: las matemáticas y los metafísicos. Obras completas, tomo II, pág.962. Aguilar, Madrid, 1973.

tir de los datos de nuestra sensibilidad, asignamos a los objetos; de manera que un objeto es una *clase* de descripciones. La *definición comprensional de las clases* es el apoyo de este desarrollo matemático, por cuanto permite tratar con conjuntos infinitos prescindiendo de la enumeración de cada uno de sus elementos, como lo ha indicado Russell al referirse a la primera aporía de Zenón sobre el movimiento; si fuera preciso obtener la serie de la sucesivas mitades de una carrera para obtener la carrera completa, entonces Zenón estaría en lo cierto al mostrar que no se culminará la carrera, debido a que ella está dada por un número infinito de secuencias. La manera de evitar tal dificultad consiste en definir la carrera completa como *la clase de todas las mitades sucesivas* y luego cada una de éstas en tanto partes de aquella queda definida por la definición de la clase. A este respecto es ilustrativo el siguiente párrafo de Russell:

> Puede decirse que la finalidad lógica de la teoría de la denotación es el permitir proposiciones de complejidad finita al trabajar con clases de términos infinitas: ese objeto se consigue mediante 'todos', 'cualquier' y 'todo' y, si no fuera así, toda proposición general referente a una clase infinita debería ser infinitamente compleja. Por mi parte no veo modo de decidir si las proposiciones de complejidad infinita son posibles o no; pero, al menos es evidente que todas las proposiciones que conocemos (e incluso todas las que 'podamos' conocer), son de complejidad finita (4). Y sólo obteniendo proposiciones de este tipo respecto a clases infinitas es como podemos trabajar con el infinito; y, hecho afortunado y digno de señalarse, este método tiene éxito. Así que debe dejarse sin resolver el problema de si existen o no unidades infinitas; lo único que podemos decir sobre esta cuestión es que ninguna unidad tal figura en departamento alguno del conocimiento humano y que, por tanto, ninguna de dichas unidades puede tener importancia para los fundamentos de la matemática.[58]

Esta manera de abordar lo desconocido tiene su base en la certeza de que nuestro conocimiento del mundo lo es de su forma y su estructura, mas no de la materia de dicho mundo, como se creyó tradicionalmente.

---

58 Russell. *Los principios de la matemática*. Parágrafo 141, pág. 510. Obras completas, tomo II. Edición Aguilar, Madrid, 1973.

Tal cuestión se planteó de manera sistemática por parte de Gottlob Frege[59], quien indaga sobre el valor cognitivo de ciertas oraciones asumiendo el análisis de las mismas. A través de dicho análisis, entramos en la determinación de lo que constituye el referente de nuestras oraciones; es el asunto planteado por Frege cuando pregunta por el objeto que denotan y el sentido de las oraciones como *'la estrella matutina' y 'la estrella vespertina'* que nombran el mismo planeta Venus. A este respecto Russell desarrolla una teoría de la denotación conocida como *teoría de las descripciones,* a partir de la cual se muestra que todas las expresiones usuales no son otra cosa que funciones proposicionales, cuyo valor cognitivo radica en la forma proposicional en cuanto tal y no en el supuesto objeto particular que denotan. En un artículo titulado *Sobre el denotar,* Russell nos dice:

> El tema de la denotación es de gran importancia, no sólo en la lógica y la matemática, sino también en la teoría del conocimiento. Por ejemplo, sabemos que el centro de masa del sistema solar en un instante determinado es un punto determinado, y podemos afirmar una serie de proposiciones acerca de él; pero no tenemos conocimiento directo de tal punto sino que sólo lo conocemos por descripción (...) En la percepción tenemos conocimiento directo de los objetos de la percepción, y en el pensamiento tenemos el conocimiento directo de objetos de un carácter lógico más abstracto; pero no tenemos necesariamente conocimiento directo de los objetos denotados por frases compuestas por palabras de cuyo significado tenemos conocimiento directo.[60]

La teoría a la cual nos referimos puede esquematizarse aquí del siguiente modo: su punto de vista sobre la denotación, Russell deriva su punto de vista sobre la denotación de la división que ha establecido entre las maneras de conocimiento que él denomina *conocimiento por familiaridad y conocimiento por descripción,* en donde conocimiento por familiarización señala el tipo de conocimiento que llamamos directo, dado por la percepción de objetos; la familiarización es una relación de sujeto-objeto cuya relación inversa pue-

59 Frege,Gottlob. "Sobre el sentido y la denotación". En: *Semántica filosófica: problemas y discusiones*. Comp. de Thomas Moro Simpson. Buenos Aires, Siglo XXI, 1973.

60 Russell, B. Sobre el denotar. En: Semántica filosófica: problemas y discusiones. Comp. de Thomas Moro Simpson. Pág. 29-30. Siglo XXI, 1973.

de expresarse diciendo que un objeto le es presentado al sujeto que está familiarizado con dicho objeto. En rigor no estamos familiarizados con los objetos mismos, sino con las percepciones que de los objetos tenemos y en cierto modo toda familiarización puede expresarse como una descripción del objeto a partir de las percepciones. El conocimiento por descripción es el que tenemos cuando decimos de algo que es esto, que es aquello, etc., en última instancia todo conocimiento parece estar dado de este modo, pero siempre presupone una familiarización con los términos que constituyen la descripción.[61]

Las descripciones son las que constituyen las frases llamadas por Bertrand Russell *denotativas;* éstas pueden denotar un objeto indeterminado, un objeto determinado o ningún objeto, por ejemplo, *'un hombre', 'el hombre de la máscara de hierro', 'el unicornio de mi patio'*. Las frases denotativas son, pues, de tal naturaleza en virtud de su forma y no por lo que denotan. En una frase denotativa no debe verse con necesidad ni un significado ni una denotación; justo porque eso se ve normalmente -dice Russell- sucede que en las oraciones en las que esas frases figuran, creemos que su denotación es parte de la denotación de la oración, dando lugar a las conocidas paradojas lingüísticas.

Cuando se dice *'el rey de Francia es calvo'*, la expresión *'el rey de Francia'* no debe entenderse con un significado por sí misma ni verse una denotación sobre la cual versa la oración total; aquí *'el rey de Francia'* es una frase denotativa que no representa otra cosa que una variable, la cual podemos denominar **x** y el adjetivo *'calvo'* como el *'es'* de nuestra frase pueden verse como el enunciado que se asigna al valor que asuma **x**. Así, la expresión *'el rey de Francia es calvo'* puede expresarse como **C(x)** y sólo cuando **x** tenga algún valor tendremos una proposición susceptible de ser verdadera o falsa, antes sólo tenemos una función proposicional. *'El rey de Francia'* es una expresión de la forma *'el tal'*, y *el tal* no tiene significado ni denota un objeto particular aun cuando se refiere a un único objeto singular. En esta oración *'el tal'* tiene una figuración

61 Cf. Russell, B. Conocimiento por familiaridad y conocimiento por descripción. En: Misticismo y lógica y otros ensayos. Obras completas, tomo II, pág. 1030 y ss. Ed. Aguilar, Madrid, 1973.

primaria y si no hay para él un valor constante, todas las oraciones en las que figura serán falsas.

Por las razones anteriores, Russell considera que el análisis correcto de toda oración en la que figuren frases denotativas, debe llevar a establecer con claridad esa frase y no dejar que participe en la oración bajo la forma de una expresión significativa; es decir, toda frase denotativa debe desaparecer de la oración en que figure y esta oración debe verse bajo la forma de una función proposicional, cuyo sentido está dado por su forma pero no por el significado de dicha frase. Es esto lo que ejemplifica Russell en la proposición *'encontré un hombre'*; cuando ésto se enuncie no debe entenderse como pretende el hablante que se entienda, es decir, que encontré un hombre determinado, pues en realidad lo que allí se expresa es lo siguiente: dada una clase de elementos a los cuales pertenece la humanidad, existe al menos un **x** perteneciente a esa clase, que es lo que se quiere decir al enunciar *'encontré'*; por eso Russell dice que podemos simbolizar por *C* el enunciado *'encontré' y 'un hombre'*, que es un **x**, hacerlo el argumento de la función *C(x)*. Quedando " *'C(x)* y *x es humano' no es siempre falsa*" como el significado de la expresión *'encontré un hombre'*. Siendo *C(x)* la función cuyo dominio es la clase de los hombres y su conjunto solución un elemento (cualquiera) del universo dado por la clase de los hombres. Si la expresión fuera *'encontré todos los hombres'* el conjunto solución sería el conjunto universo.

Siendo todas las expresiones funciones proposicionales, es necesario expresarlas explícitamente bajo esa forma y, por consiguiente, debe hacerse el análisis de los cuantificadores implícitos en las frases denotativas, los cuales son *'uno', 'todos', 'algunos' y 'ninguno'*. Luego de este análisis en el que se pone en claro el sentido de la unicidad, Russsell explica el sentido y la diferencia entre lo indeterminado y lo determinado; a este último se refieren las expresiones de la forma '*el tal'*.

Esta teoría de la denotación que propugna Russell constituye una legitimación de la clase de conocimiento que representa la matemática, la cual "es una disciplina en la que nunca sabemos acerca de qué estamos hablando, ni si lo que decimos es cierto",[62] sin que con ello estemos al margen del sentido.

En su artículo *'Conocimiento por familiarización y conocimiento por descripción'*, Russell señala cómo los nombres propios son reducibles a descripciones, hasta el punto de no considerar como nombres propios más que *'yo'* y *'esto'*, incluso luego niega a *'yo'* el carácter de nombre propio en sentido estricto y muestra cómo en última instancia el conocimiento por familiarización lo es también por descripción, porque se trata de descripción de sensaciones. Esto último lo aclara mucho más en su conferencia *Sobre la realidad para el sentido común y para la física,*[63] en donde nos dice que para la ciencia una cosa es una serie de aspectos sometida a las leyes causales como una descripción que constituye una construcción lógica. Con estas consideraciones, Russell llega a plantear explícitamente que, en estricto sentido, no existen nombres propios. Tal afirmación tiene mucho interés para el propósito de Russell de fundamentación del conocimiento matemático, debido a que los nombres propios son considerados como una definición extensional de aquello que es nombre, pudiéndose reducir todo a descripciones definidas a través de definiciones comprensionales.

Ahora bien, si toda definición extensional se puede reducir a una definición comprensional, la matemática no versa sobre entes dados como supuestos ontológicos y además puede discurrir sobre clases de objetos infinitas, lo que, por otra parte, permite concluir que todo lo que se sepa del mundo es respecto de su forma y nada de su contenido como substancia; más aún, una proposición como *'El Everest es el Chomolungma'* y *'El Everest es el Everest'* están en la misma relación y son de la misma forma de las proposiciones *'Un triángulo es una figura geométrica'* y '*Un triángulo es un triángulo*'.

A partir de esta teoría de la denotación, que es una teoría del conocimiento, estamos justificados para discurrir sobre lo desconocido sin que suframos la

62 Russell, B. Misticismo y lógica. pág. 959. Op. cit.
63 Russell, B. El mundo de la física y el mundo de los sentidos. En: Nuestro conocimiento del mundo exterior como campo para el método científico en filosofía. Obras completas, tomo II, pág. 1194 y ss.

angustia de Sócrates o Gorgias porque no podían conocer más que lo desconocido y precisamente por serles desconocido no podían conocerlo, siendo ésta una de las razones en que Platón funda su teoría de la reminiscencia, pues el conocimiento no tendría otro origen que el recuerdo.

Dice Russell que podemos saber cuántos hombres hay en un país y cuántas mujeres con sólo saber que cada hombre tiene una única esposa y cada mujer tiene un único marido; es así como procedemos respecto de las clases infinitas:

> Si cada término de una colección puede engancharse a un número, y todos los números finitos se emplean una vez, y solamente una vez, en el proceso, entonces nuestra colección debe tener exactamente tantos términos como números finitos. Este es el método general mediante el cual se determinan los números de las colecciones infinitas[64].

Debe añadirse que a este tipo de conocimiento ya estabamos habituados desde cuando Cervantes nos ofreció *El Ingenioso hidalgo Don Quijote de La Mancha*, pues abundan allí informaciones de esa naturaleza, entre ellas algunas como las de que Don Quijote era tan diestro en manejar la espada como en manejar el caballo y que había topado con una doncella tan bella como inteligente, etc. En realidad resulta interesante esta opinión de la insubstancialidad de nuestro conocimiento, pues encontramos que cuando Cervantes nos dijo que Don Quijote era tan diestro en manejar su espada como lo era en el manejo de su caballo, hasta entonces no había informado nada acerca de su destreza sobre lo uno y lo otro, sin embargo, al escucharle aquel enunciado nos formamos cada lector una idea determinada acerca de la destreza de Don Quijote en el manejo de su espada y de su caballo, y esa idea 'precisa' que nos formamos está en relación con otra serie de cosas que de Don Quijote antes le habíamos oído decir, sin que ninguna hubiese versado sobre lo que ahora enuncia; si hiciéramos el análisis retrospectivo, nuestra idea al respecto se desvanecería. Aproximadamente es esto lo que nos ocurre cuando buscamos el significado de una palabra en el diccionario y la encontramos

64 Russell, B. Misticismo y lógica. pág. 966. Op. cit.

definida con otras, también de significado desconocido, teniendo que buscar el de estas últimas y así ad *infinitum*, si no conociéramos al menos una.

Aquí nos sentimos inclinados a suscribir con Russell la opinión de que en realidad no comprenderemos el significado de la palabra *queso* si no disponemos de una definición ostensiva al menos de la vaca si no de la leche, no obstante contrariar así la reducción de todo conocimiento por familiaridad al conocimiento por descripción.

Igual cosa nos sucede en matemáticas donde creemos saber cuántos objetos hay en una colección cuando los relacionamos con los números naturales, y si ahora Russell nos define estos números en términos de una *clase de clases*, caemos en cuenta que a todo lo que hasta ahora habíamos contado, realmente no le conocíamos su número, porque de los números naturales no teníamos conocimiento (por familiarización). En un determinado momento nos percatamos de que nuestro conocimiento está dado por la relación de semejanza que establecemos entre distintas descripciones de objetos, y que en última instancia remiten a alguna imagen ostensiva de alguna cosa. Este parece ser el punto al que Russell se refiere en el siguiente texto:

> Dado un determinado enunciado en un lenguaje en el cual conocemos la gramática y la sintaxis, pero no el vocabulario, cuáles son los posibles significados de tal enunciado, y cuáles los significados de las palabras desconocidas que lo harían verdadero?
>
> La razón de la importancia de tal cuestión estriba en que, con mucha más aproximación de lo que pudiera imaginarse, representa el estado de nuestros conocimientos sobre la naturaleza. Sabemos que determinadas proposiciones científicas -expresables en las ciencias más avanzadas mediante símbolos matemáticos- son más o menos ciertas en relación con el universo, pero vamos completamente a la deriva cuando tratamos de interpretar los términos que intervienen en tales proposiciones. Haciendo uso por un momento de un par de términos anticuados, sabemos mucho más de la **forma** de la naturaleza que de

su **materia**. De acuerdo con ello, lo que realmente sabemos cuando enunciamos una ley sobre la naturaleza es solamente la probabilidad de **alguna** interpretación de nuestros términos que haga la ley aproximadamente cierta"[65].

65 Russell, B. Introducción a la filosofía matemática. pág. 1298. Obras completas. Tomo II.Ed. Aguilar, Madrid, 1973.

CAPITULO IV

ANÁLISIS DE LAS APORÍAS DE ZENÓN DESDE EL CÁLCULO PROPOSICIONAL

Gregory Vlastos ha escrito un artículo sobre Zenón de Elea inserto en The *Encyclopaedia of philosophy*,[66] en el cual desglosa minuciosamente cada uno de los fragmentos de Zenón para someterlos al cálculo proposicional y determinar la validez de cada inferencia teniendo en cuenta las premisas implícitas en cada argumento. Procediendo así, Vlastos sugiere, en los casos en donde no es explícita la presencia de algún supuesto, la asunción que Zenón estaría haciendo y a partir de la cual podría llegar a la conclusión por él deseada. Luego de ese examen nos da una opinión sobre el papel que esos argumentos han jugado en la historia de la matemática y de la filosofía, oponiéndose a la interpretación que hemos presentado de Jean Zafirópulo que corresponde a la de Paul Tannery[67], pues no considera que los argumentos de Zenón no estén dirigidos a demostrar la imposibilidad del movimiento y de lo múltiple,

66 Vlastos, G. Zeno of Elea. The Encyclopaedia of philosophy. Vol. 8. 1967. London. The Mc Millan Company.

67 Paul Tannery. *Pour L'histoire de la science Heléne* (1877). París, editions Jacques Gabay, 1990.

contra lo que sostiene la opinión común, y, consecuentemente, al contrario de lo que creen Zafirópulo y Tannery, ellos no se dirigían exclusivamente a los pitagóricos que, según él, sostenían además la hipótesis de la discontinuidad; no siendo entonces cierto que la doctrina del atomismo sucumbiera para siempre como consecuencia de los ataques de Zenón. Pues se ha sostenido que el atomismo, soportado en la concepción de lo real como pluralidad y discontinuidad, había sido abandonado como teoría del mundo físico al abrirse paso la tesis eleática sobre la naturaleza continua y el carácter unitario de la realidad.

Por otra parte, dice Vlastos que ciertamente no es tan grande como se ha creído, la influencia de Zenón en la historia de la matemática. Esta influencia se reduce a mostrar las complicaciones contenidas en la noción de infinito y, en segundo lugar, respecto de la lógica, al habernos proporcionado el mejor mecanismo para darnos a entender que los lugares comunes pueden cubrir absurdidades. Mayor ha sido -continúa Vlastos- su influencia en la filosofía, si se tiene en cuenta que Aristóteles ante su imposibilidad de encontrar alguna solución a las dificultades planteadas por Zenón, debió introducir su famosa teoría del infinito potencial. Por otro lado, es manifiesta su influencia en los atomistas, pues a partir del argumento de la dicotomía introdujeron las "magnitudes atómicas".

Vlastos considera que lo expresado en el fragmento 9 de Meliso -"Pues si existe, debe ser una unidad. Siendo una unidad no debe ser corpórea. Si, en efecto, tiene un espesor tendría partes y no sería entonces una unidad"[68], que no es otra cosa que la incorporeidad del Ser parmenídeo, habría sido ya deducida por Zenón en desarrollo de la tesis del maestro, aun cuando el mismo Parménides no lo hubiera hecho explícito. Finalmente, el gran aporte de Zenón al mundo fue haber fundado la prosa argumentativa griega, lo que llevó a Aristóteles a llamarlo "*el inventor de la dialéctica*".

Nos ocupamos enseguida de reseñar cada uno de los argumentos de Zenón en la forma en que Vlastos nos los presenta:

68 J. Zafirópulo. *L'ecole eléate*. París, Société d'édition "Les Belles Lettres", 1950. Pág. 278.

Primer argumento contra la pluralidad:

> Zenón pretende probar que si [P] hay muchos [existentes] ellos deben ser [Q] 'tan pequeños que no tienen extensión' y [R] 'tan grandes que sean infinitos'. Su argumento tiene tres partes, la prueba de [Q], la transición a la prueba de [R] y la prueba de [R].
>
> El argumento soporte de [Q] puede seguirse así:
>
> [A1] si hubiera muchas cosas, cada una de ellas tendría que tener (como mínimas condiciones de existencia) unidad y autoidentidad.
>
> [A2] pero nada puede tener unidad si tiene extensión.
>
> [A3] cualquier cosa extensa es divisible en partes.
>
> [A4] y cualquier cosa que tenga partes no puede ser una.
>
> [A5] por lo tanto si hubiera muchas cosas, ninguna de ellas podría tener extensión.

Dice Vlastos que no hay inconveniente en que de un mismo sujeto lógico pueda predicarse uno y muchos; así como de los Estados Unidos de América decimos que es una nación y muchos Estados. Siendo esta verdad -dice- tan elemental nos asombraremos de que Zenón la haya pasado por alto, y nos recuerda que aún en tiempos de Platón cualquier conjunción de unidad y pluralidad estaba en disputa por algunos filósofos, por lo tanto, no hay razón para creer que Zenón no hubiera caído en ese error, sobre todo que Meliso lo repite inocentemente en su fragmento 9.

Esta manera de referirse a la dificultad que Zenón quiere plantear es curiosa, pues el autor aún mostrando que en aquellos lo *Uno y lo Múltiple* son nociones contrarias, cree que todos se equivocaron al no predicar de un mismo sujeto lógico esas nociones (contrarias). Si nos acogemos a su ejemplo, podemos siempre predicar de algo una cosa y su contraria, sólo guardándonos de enunciar el aspecto relativo a cada una. Es evidente que cuando

Zenón dice que si una cosa es una no puede ser muchas se refiere al Ser de la cosa, por eso se podría decir, en el sentido etimológico del griego, que es una discusión ontológica.

Esta refutación de Vlastos, según Platón en su diálogo *Parménides*, la hizo Sócrates a Zenón cuando Sócrates "era aún muy joven y no había sido presa de la filosofía". Encontramos allí que habiendo leído su obra sobre el primer argumento, Sócrates le hace ver que está sosteniendo la imposibilidad de lo múltiple, en franca oposición a la opinión corriente y Zenón le dice que, en efecto, de eso se trata. Sin embargo, cuando Sócrates dice que realmente está queriendo demostrar la tesis de Parménides sólo que en otras palabras, Zenón no admite que sea su intención demostrar la existencia de lo Uno y le aclara que no ha comprendido el verdadero carácter de su obra, aun cuando, por lo demás, "no es inadecuada la imagen que se forme de ella". Sócrates, entonces, queriendo llegar al fondo del asunto, refuta el argumento en los términos que aquí lo hace Vlastos, señalando que nada de extraordinario tiene que algo sea múltiple respecto de un aspecto y sea también uno en otro sentido, del modo como él es múltiple en cuanto tiene un lado derecho, un lado izquierdo, etc., y es uno en tanto que es un hombre entre el grupo; mientras que le resultaría sorprendente que *formas* tales como la semejanza y la desemejanza, la unidad y la pluralidad, etc., pudieran mezclarse y aparecer como semejante y desemejante, una y múltiple, etc. Ante esto se esperaba que Parménides y Zenón mostraran su disgusto, pero en cambio se sonreían y se miraban entre ellos mientras Sócrates hablaba de ese modo. Parménides no respondió directamente a la refutación de Sócrates, se limitó a decirle: "Cuánto te envanece, Sócrates, este ataque de nuestros argumentos", y enseguida trasladó la discusión a una investigación en torno a la existencia de las *formas* (esencias), haciendo caer en cuenta a Sócrates de que el problema tratado era más complejo ya que no se refiere a la forma de nombrar y asumir los objetos según sus relaciones, sino al Ser de ellos en tanto que son lo que son.[69] De acuerdo con lo visto en el capítulo anterior, encontramos que Vlastos procede según la ciencia contemporánea y no se involucra, como los filósofos de la antigüedad, en una investigación sobre la esencia o substancia del mundo.

---

69 Cf. Platón. *Parménides*. 127b-130b. Edición Aguilar, Madrid, 1980.

Aquí el diálogo gira hacia la existencia de las *formas*, pues ha quedado en claro que no se trata de predicar de un mismo sujeto lógico el ser uno y múltiple respecto de distintas relaciones, sino en relación con su esencia. Se trata de clarificar si un objeto en tanto tal es uno o es múltiple, como si preguntáramos: ¿Este libro en tanto libro, es uno o es muchos? La respuesta no podrá ser es un libro y es muchas hojas, ya que la pregunta para esta respuesta no se ha elaborado y sería una manera de romper la comunicación, que es lo que Vlastos ha hecho en su respuesta. Situado en otro horizonte espistemológico no presta oido a aquella discusión metafísica acerca del ente.

Antes de continuar relatando los comentarios de Vlastos a los argumentos de Zenón, voy a presentar una corta consideración: la preocupación de los filósofos griegos de esa época, a juzgar por el lenguaje que emplean, estaba dada por saber si era posible una explicación de los fenómenos en términos de describir en un discurso racional lo que a los sentidos se ofrece, y esto que se ofrece a los sentidos era el contenido de la noción de realidad. Ahora bien, los entes percibidos por los sentidos son corpóreos (extensos, dirá Descartes), mientras que lo inextenso corresponde a lo conceptual, con lo cual una indagación sobre el Ser de los entes, es decir, en griego, una ontología, no incluía entidades inextensas o, como diremos hoy, con longitud cero. La parte del argumento contra la pluralidad en la cual Zenón dice que si algo al ser añadido o al ser disminuido a otro no lo aumenta ni lo disminuye es porque lo agregado o lo quitado es nada, se justifica en ese contexto, ya que no contribuye a la discusión sobre la unicidad o la multiplicidad del Ser, introducir nociones como la de extensión cero, que hasta cierto punto es una contradicción en los términos. Aquí resulta de interés el texto de Giorgio Colli que transcribo a continuación:*

> Aristóteles, en el paso que hemos leído (*Metaph.* 1001 b 7), cita a Zenón, y se sirve de él como de un argumento contra Parménides y contra su tesis de que "el ser es uno". En realidad, Zenón, desarrollando la discusión de la tesis de Parménides asumida como hipótesis, demuestra su absurdo. Zenón y Aristóteles están de acuerdo por lo que respecta al problema metafísico del ser, y precisamente porque existe este acuerdo Aristóteles se sirve de Zenón. Pero luego añade –y hay aquí una cierta irregularidad en el procedimiento de Aristóteles– que esta demostración de Zenón, aunque es una demostración contraria a la tesis de Parménides, no es enteramente válida,

"en cuanto que evidentemente para él el ser tiene extensión". Aristóteles se refiere a la argumentación de Zenón porque le es útil en este punto contra Parménides, pero no la acaba de aceptar del todo, porque le crearía dificultades con un problema diferente al de la sustancia del ser, en concreto con el de la posibilidad de una ciencia. En otras palabras, mientras que por lo que respecta al *problema metafísico* –el ser no es sustancia– Aristóteles acepta a Zenón, no ocurre lo mismo con el problema de la ciencia: en otros lugares, cuando se trata de la posibilidad de la ciencia, Aristóteles ataca y trata de superar a Zenón. Aquí el problema queda al margen; pero Aristóteles se siente con el deber de precisar que no acepta enteramente el razonamiento de Zenón, y lo critica: de hecho, él mismo defiende el "punto" como base de la geometría, que es *inextenso*. Pone un uno en sí, no metafisico, inextenso, para poder superar la crítica de Zenón que no deja escapatoria si se aplica a la extensión. Ya nos hemos referido a cómo en realidad la aporía no queda de este modo superada; pero éste es otro problema.

Ha permanecido hasta ahora en suspenso un punto de enorme importancia para un juicio sobre Zenón. Tal vez del examen sucesivo de los fragmentos y de los testimonios surja una ayuda para adoptar una posición sobre si el presupuesto de que "el uno en sí" *es extenso*, punto en el que se apoya la crítica de Aristóteles y que está en la base de la argumentación de Zenón, *es un presupuesto* general de la especulación de Zenón, o si es *tan sólo una especulación dialéctica asumida aquí*, en este *logos* determinado. Tenemos una declaración inequívoca de Zenón sobre este punto: podemos considerar que si Aristóteles critica a Zenón "en cuanto que evidentemente para él el ser tiene extensión", esta afirmación debía de ser un presupuesto general de la especulación de Zenón, de otro modo la crítica de Aristóteles no tendría sentido.

Puede decirse que Zenón ha demostrado que "el uno en sí indivisible y que tiene extensión" es un absurdo; sobre este punto Aristóteles está de acuerdo. Pero, ¿se ha planteado Zenón el problema del "uno en sí indivisible que no tiene extensión"? Al proponer un "uno en sí" de este tipo, el punto geométrico, Aristóteles trata de superar la aporía de Zenón. Naturalmente, este "uno en sí" no atañe al problema metafísico, sino tan sólo al de la ciencia. ¿Se ha enfrentado Zenón por su parte con el problema del ser en sí inextenso y metafísico?

> En 29B1 DK (Simpl. *in Arist. Phys.* 140, 34) se lee que si existe la unidad como base de la pluralidad, "es necesario que cada cosa tenga un tamaño..." También de este paso parece seguirse que Zenón no concedía realidad a lo que no tiene extensión.[70]

Por otra parte, parece que, habiéndose llegado a la necesidad de hacer intervenir la noción de infinito para la solución de algunos problemas, se discutía sobre la conveniencia de esa noción y por eso todos los argumentos de Zenón pueden verse como una disputa contra la pretensión de ver lo infinito contenido en lo finito.

De las premisas que Vlastos dice deben constituir la primera parte del argumento de Zenón, aquí llamada prueba de [Q], digamos con Vlastos que, en efecto, [A1] es impecable y que ella responde justamente a la concepción de Zenón sobre lo que es una cosa existente; en cuanto a [A2] y [A3] parece que una de ellas sobra y debe ser [A2] para que la conclusión no sea tautológica, pues lo que se pretende deducir aquí es que la extensión no conviene a lo que existe si lo existente es múltiple. Mientras que [A3] no es inocua como Vlastos señala, sino la premisa que informa acerca de lo que se entiende por extenso, a saber, aquello que puede ser dividido. El razonamiento se organizaría del siguiente modo:

[A1] informa qué es un existente: lo que tiene unidad y autoidentidad.

[A3] informa lo que ha de entenderse por extenso: lo que puede dividirse en (muchas) partes.

[A4] aclara que uno y múltiple se definen correlativamente. Porque A4 puede ser leída como diciendo: "y cualquier cosa que sea muchas no puede ser una".

[A5] sería la conclusión necesaria: un existente (lo que es uno) si es extenso (es muchos) contradiría A4. Como afirmamos A4, por consiguiente

---

70 Giorgio, Colli. *Zenón de Elea*. Editorial Sexto piso, México, 2006. págs. 83-84.

un existente no puede ser extenso, y aquí Zenón se estaría adelantando al fragmento 9 de Meliso.

Lo que Vlastos llama la transición a la prueba de [R] tiene la forma siguiente:

[d] si un existente al ser añadido a otro no lo incrementa, ni lo disminuye cuando se le sustrae, entonces tal existente será nada.

[a,b] un existente inextenso no incrementará a otro cuando se le añada (ni lo disminuye cuando se le sustrae).

[c] por lo tanto, un existente inextenso será nada.

Vlastos señala que no se hace esfuerzo alguno para probar a [d], esto parece correcto ya que [d], como bien lo ha señalado, es un presupuesto. Si un ente no tiene extensión, no es un ente, y justamente por esto tiene valor la parte anterior del argumento en donde Zenón muestra que si los entes son muchos, entonces no tienen extensión; como si dijera: si son muchos, entonces no son en absoluto. Ahora deberá demostrar que no pueden ser muchos porque serían infinitos, y esta segunda parte, (prueba de [R]), parece que pretende eliminar toda posibilidad de que los entes sean muchos, ya que con la primera [Q] alguien podría decir que la consecuencia es que los entes son inextensos pero múltiples.

Vlastos hace notar que esta parte del argumento que ha llamado la transición a la prueba de [R] no puede tomarse como aparece en el texto asignado a Zenón, dando la idea de que [d] fuera una inferencia obtenida a partir de [a,b] y [c], dado que [d] es con toda evidencia una asunción que predica la extensión como cualidad de los entes y a partir de la cual parece inferirse [c] tomando [a,b] como puente, pero en rigor [a,b] es una proposición analítica a partir de [d], pues [d] dice: para que un existente sea algo real ha de incrementar a otro cuando se le añada o ha de disminuirlo cuando se le sustraiga. Lo que debería probarse es [d], es decir, que los existentes son extensos, ya que viene de probar en [Q] que son inextensos, para que a partir de la prueba de extensión se dirija a probar que tienen extensión infinita. Sucede, entonces, que Zenón aquí se ha servido de una premisa nueva para lograr su objetivo, ya que esa premisa no la utilizó en la primera parte del argumento, en donde sólo se limitó a postular de los existentes que tenían unidad y autoidentidad.

Podría verse el argumento de tal modo que en la prueba de [Q] Zenón haya demostrado que si son múltiples entonces serían inextensos, lo que contradiría la asunción (implícita y que Vlastos no consideró pertinente agregar a la prueba de [Q]), de que los existentes son extensos. Ahora (en la transición a [R]) Zenón pasaría a demostrar que siendo los existentes extensos como se postuló desde el principio (en la prueba de [Q]) serán infinitos, lo que hará en la prueba de [R]. Pero en tal caso, el argumento no tendría tres partes sino dos: la prueba de [Q] y la prueba de [R].

Lo que aquí se ha dicho que es transición a [R] no habría que tomarlo como otra parte, sino como el volver al supuesto de partida, y, procediendo así, no habría inconsecuencia alguna de parte de Zenón, pues estaría operando con un sólo supuesto respecto de los existentes, el cual diría: un existente ha de ser extenso y tener unidad y autoidentidad; sólo que de esta manera Zenón no estaría afirmando lo dicho por Meliso en su fragmento 9, sino más bien refutándolo por reducción al absurdo ya que entonces el Ser sería inextenso si fuera múltiple y no lo contrario, como Meliso lo dice en su fragmento.

La prueba de [R]: "Si [muchos] existen, cada uno [de los existentes] debe tener alguna extensión y volumen y alguna [parte de cada uno] debe situarse más allá (ápécein) de otra [parte del mismo existente] y el mismo razonamiento se mantiene para la [parte] proyectada: ésta también tendrá alguna extensión y alguna [parte] de ella se proyectará. Este razonamiento se repite por siempre. Ninguna [(parte), es decir, ninguna parte resultante de esta continua subdivisión] será la última, ni nunca ninguna [parte] existirá [similarmente] relacionada con [es decir, proyectada a partir de] otra (Fragmento 1, primera parte)".

"Zenón debió haber procedido sobre la base de dos asunciones:

(C1) un existente infinitamente divisible debe contener una infinitud de partes.

(C2) si cada miembro de un grupo infinitamente numeroso tiene alguna extensión (mayor que cero) entonces la extensión agregada del conjunto debe ser infinita"

La pregunta que se hace aquí Vlastos es: ¿Por qué Zenón pensó que la sumatoria de los ***n*** términos (partes de un segmento finito) sería mayor que el segmento del cual son partes y tanto como para ser infinita, si es intuitivamente claro que tal suma de las partes no puede ser superior al todo del que son partes?

"Seguramente Zenón hizo otra asunción:

> (C3) una secuencia infinita de términos de extensión decreciente debe tener un término **e** que es el más pequeño de todos. Sobre esta asunción el segmento total **A** contendría infinitamente muchas partes más grandes que **e** (las cuales como todas las otras partes en la colección, tendrían una extensión finita mayor que cero). La suma de esta colección será, en efecto, infinita: esta tendría que ser al menos tan grande como infinitas veces **e**. Pero, desafortunadamente (C3) conllevará a: (C4) una secuencia infinita de términos de extensión decreciente debe tener un último término. Lo cual contradice el punto establecido en el texto de Zenón de que la secuencia no tiene último término (ninguna [parte] será la última. Fragmento 1, primera parte)".

Por infinito se entiende aquí la definición que ha dado Russell: *lo que no puede alcanzarse por inducción matemática partiendo de 1*. Entones no cabría usar ***n*** como el número infinito de partes en que algo se ha dividido por la reiterada obtención de una parte más en cada división. Cuando Vlastos dice: "¿Por qué Zenón pensó que la sumatoria de los ***n*** términos (partes de un segmento finito), sería mayor que el segmento del cual son partes y tanto como para ser infinita, si es intuitivamente claro que tal suma de las partes no puede ser superior al todo del que son partes?", se introduce una primera confusión; pues si se hace intervenir también la definición de que *infinito es aquello cuya parte puede ser igual al todo del que es parte*, entonces no importa que sea intuitivamente claro que la parte sea menor que el todo del que es parte, y no habría por qué asombrarse de que Zenón pensara lo que ha pensado. Pero, en segundo lugar, se genera otra confusión con la mención de los ***n*** términos, porque si *n* está usado, como usualmente se hace, para indicar el último término de la serie, es evidente que *n* no es un número infinito y en tal caso Zenón no estaría afirmando que la suma de los *n* términos de un segmento finito sea mayor que el segmento del que son partes. Si con *n* se quiere significar un número infinito, la confusión será mayor; pues analicemos qué quiere decirse con un número infinito de extensiones (porque cada parte es extensa). Aquí el recurso contra Zenón es el de una serie decreciente de infinitos términos cuyos valores tienden a cero, como la del ejemplo tomado en el capítulo anterior: 1/2, 3/4, 7/8, 15/16, ... pero, si se examina, hay petición de principio, ya que se supone lo que se controvierte, a saber: que la división pueda en efecto llevarse hasta el infinito se pierde de vista que infinito significa que no se termina.

Debe aclararse, ante todo, que se puede hablar de un número infinito de puntos si por punto se entiende un indefinible, así como puede hablarse de infinitos intervalos si por intervalo se entiende una relación entre puntos, etc. Pero si por extensión entendemos una dimensión espacial newtoniana en el sentido de longitud, es evidente que tal longitud infinita no es pensable y si aquí se nombra, en rigor no se nombra lo que se desea, sólo se asume un recurso de analogación a partir de una longitud finita; cuando alguien diga una longitud infinita lo que realmente se representa es una longitud muy grande, pero en todo caso finita. Lo que denominamos representación de algo infinito es la negación de la representación de algo finito.

Aquí la dificultad parece estar más bien por el lado de la admisión de la divisibilidad infinita de una cosa extensa, ya que si se admite que algo extenso pueda ser dividido hasta tener tantas partes como números naturales, entonces esa cantidad debe ser infinita como ellos. Esto no requiere de mucho esfuerzo, pues, su negación es autocontradictoria. Por lo demás, no importa el tamaño de las partes. El absurdo no parece estar en la idea de que una suma de infinitas partes (mayores que cero) sea una extensión infinita, sino en la idea de que se llega a tener por partición dicotómica esas infinitas partes, pues se ha dicho por definición que infinito es lo que no se alcanza por adición de uno, y es evidente que una partición dicotómica quiere señalar adición recurrente de una nueva parte.

Cuando se dice que el conjunto de partes de A es siempre menor o igual que A, si esas partes están dadas por la sucesiva división dicotómica, eso es evidente siempre que el término $A/2^n$ sea obtenido con *n* finito. Pero este caso no lo contempla el argumento de Zenón y parece equivocado que n sea infinito como lo insinúa Vlastos. Si se dice que A es el límite de la suma de $A/2 + A/2^2 + A/2^3 + A/2^4... + A/2^n$, cuando *n* tiende a infinito; si se quiere indicar con esa expresión cuando *n* se hace muy grande, es plenamente correcto, y estaríamos hablando del caso antes señalado: no podría *n* llegar a infinito, por ser claro que está aumentando a partir de 1. Por otra parte, que un segmento A se divida muchas veces, tantas como se quiera, no quiere decir nunca que se dividirá infinitamente. Por lo demás, conviene señalar que la *suma* en tanto operación aritmética, tal como la conocemos, está definida para operar con números finitos. Si alguien dijera que la suma de números infinitos o de números infinitos y finitos da como resultado un número infinito o por el contrario un número finito, ante tal afirmación no tendríamos nada que decir mientras no se conozca lo que quiera señalarse con cada uno de esos términos, pero si con el vocablo común *suma* se quiere denotar la misma operación de nuestra aritmética elemental, hay que decir, primero que todo, que números infinitos no se suman, porque su definición no se extiende a *números transfinitos* y si existe otra definición para otra operación con esta última clase de números no inductivos, nadie tiene razones válidas para oponerse a la existencia de dicha operación, según los términos en que se haya reglamentado. Tal cosa no muestra en lo más mínimo que Zenón no esté justificado para proceder del modo como lo ha hecho en su argumento. Es decir, para obtener un segmento tan grande que no sea determinable el número (la cantidad) de secciones que se agregan.

Segundo argumento:

> "Si [P] hay muchos, es necesario que [Q] ellos sean tantos como son, ni más ni menos. Pero si hay tantos como son, deben ser finitos [finitamente muchos]. Si [P] hay muchos, [R] los existentes deben ser infinitos [infinitamente muchos]. Hay siempre otro [existente] entre uno y otro existente, y de nuevo otros entre estos y así los existentes son infinitos [infinitamente muchos]. (Fragmento 3)"

Respecto del argumento para [Q] Vlastos lo considera irrefutable antes de la demostración de los cardinales transfinitos y los conjuntos supernumerables de George Cantor, "de no ser así, ¿cómo podría ser desaprobada la afirmación de que cada conjunto determinado es enumerable e invalidada la inferencia que a partir de una totalidad definida infiere una totalidad finita?". Como lo señalamos antes; sin la definición de los conjuntos por comprensión, siendo definibles únicamente por extensión, cualquier todo sería finito. La primera parte de este argumento es, en efecto, el mejor ejemplo para mostrar la diferencia de opinión respecto de lo que es el conocimiento de objetos entre los griegos y la nueva perspectiva epistemológica que se funda a partir de la teoría de la denotación que considera el conocimiento en general como descripción, en el sentido señalado por Russell, a la cual ya nos hemos referido más arriba. Lo que ese argumento muestra es que sólo extensionalmente puede definirse cualquier conjunto, con lo cual está implícito que lo conocido es por "familiarización". Esa era la opinión a la que se refería Sócrates a propósito de Gorgias, que debido a que no lo conocía no podría *re-conocerlo* aun cuando lo tropezara en medio de la multitud.

Cuando Russell ha demostrado que el conocimiento por él denominado por familiarización se resuelve en conocimiento por descripción, ha legitimado la definición comprensional de las clases y con ella la posibilidad de discurrir sobre conjuntos no alcanzables por enumeración de sus miembros. Aquí Zenón muestra que debe entenderse *la parte* como prioritaria lógicamente respecto del *todo*, por consiguiente, si hay una totalidad definida es porque se ha llegado a ella por enumeración de sus partes, y si tal cosa se ha logrado es porque esa totalidad es finita.

La refutación de esa asunción de Zenón es posible sólo si el todo tiene la prioridad lógica sobre las partes, que es lo que esencialmente contiene la teoría mencionada, la cual permite la definición comprensional de las clases y valida desde un punto de vista lógico la teoría matemática del infinito. Así, como se ha indicado, puede decirse a Zenón que no es necesario que sean finitas las unidades al ser tantas como son. Al quitar esta demostración a Zenón evidentemente se elimina el dilema, pues la segunda parte del argumento estaría mostrando con suma claridad que los existentes son infinitos.

Tercer argumento:

"[E1] si [H1] un existente fuera infinitamente divisible, ninguna contradicción emergería de la suposición de que [H2] ha sido dividido **exhaustivamente.**

[E2] pero una división "exhaustiva" reduciría los existentes a elementos de extensión cero. Pero esto es imposible porque,

[E3] ninguna magnitud extensiva puede consistir en elementos inextensos.

Según Vlastos la hipótesis [H1] debe leerse: las secuencias de divisiones a las cuales el existente puede estar sujeto, no tiene límite inferior; no importa cuántas divisiones se le haya efectuado, una siguiente puede ser efectuada. Y la suposición [H2] establece que la secuencia total de divisiones ha sido completada y una situación de hecho ha sido alcanzada en la cual ninguna división siguiente puede realizarse. Estas hipótesis, continua Vlastos, son distintas y no es claro de ningún modo que la primera conlleve a la segunda. Ver la segunda implicada por aquella, es el error de Zenón. Por otra parte, si una contradicción resultara de la suposición de que la secuencia de divisiones ha sido "exhaustivamente" efectuada, esto en nada contribuiría a falsar a [H1], a menos que su suerte lógica estuviera unida a la de [H2].

Esta interpretación del argumento hecha por Vlastos, asume que infinito es aquello que no puede ser alcanzado por inducción matemática partiendo de 1, porque para que [H1] asegure que no importa cuántas divisiones se hayan efectuado, una siguiente puede ser efectuada, es necesario que infinito se haya definido del modo aquí indicado, y para que [H2] no se siga de [H1] (o lo contrario) es necesario otra premisa, a saber, que el infinito no se alcanza de hecho, con lo cual está diciendo que lo que se alcanza de hecho es aquello a lo que se llega paso a paso, es decir, lo fáctico es discreto y finito. Si tal cosa afirma, afirma lo que Zenón: que lo sensible no es el Ser ya que lo sensible es discreto y el Ser, según Parménides, es continuo.

El argumento en la forma en que Vlastos lo ha ordenado, puede verse así: [E1] si [H1] un existente puede dividirse un número *x* de veces, ninguna contradicción emergería de la suposición de que [H2] ha sido dividido un número *x* de veces (exhaustivamente). En otras palabras, se expresa que afirmando [H1] se afirma la posibilidad de [H2], cuando se haga explícito el sentido de la palabra *"puede"* esto es más claro, si con ella quiere decirse que una situación tal no es autocontradictoria; por ejemplo, el lápiz puede ser amarillo, entonces cuando el lápiz sea amarillo no constituye una situación autocontradictoria; más aún, la existencia del lápiz amarillo certifica la verdad de la primera proposición. En nuestro caso, si [H1] dice que puede dividirse un número *x* de veces, se entiende que [H2] (haberlo dividido un número de veces *x*) está en concordancia con H1 y, más aún, que H2 es posible gracias a H1; luego no es cierto que H1 y H2 sean hipótesis distintas e independientes, incluso H2 implica H1 por la noción contenida en la palabra *"puede"*. H2 $\rightarrow$ H1 es equivalente a decir: un existente ha sido dividido un número de veces *x*, luego, un existente puede ser dividido un número de veces *x*. La dificultad no parece estar en la forma del razonamiento sino en la noción de divisibilidad infinita, por la definición dada de infinito.

Nótese lo siguiente: cuando alguien diga [E1]: si [H1] un existente fuera 3 veces divisible, ninguna contradicción emergería de la suposición de que [H2] ha sido dividido tres veces. Entonces es claro que [E1], aceptando que Zenón la haya asumido, no es formalmente errónea. Ahora, expresando [E1] en forma más general es evidente que es una función proposicional bien formada: si [H1] un existente fuera *x* veces dividido, ninguna contradicción emergería de la suposición de que [H2] ha sido *x* veces dividido. [E1] nunca puede ser contradictoria en tanto función proposicional, como pretende Vlastos que lo sea, lo que se hace contradictorio es el significado de [H1] al darle a *x* el valor de infinito por el significado que se ha dado a infinito, pues se ha dicho que es aquello no alcanzable por sucesivas adiciones de 1, es decir, una división infinita no se alcanza por sucesivas divisiones.

Entonces, [H1] si un existente fuera divisible (dicotómicamente, es decir, adicionando siempre una nueva mitad) un número de veces (en lugar de *x)* no alcanzable por adición de 1, ninguna contradicción emergería de que [H2] ha sido dividido (dicotómicamente, es decir, adicionando siempre una nueva mitad) un número de veces no alcanzable por adición de 1. Aquí es evidente que el razonamiento es correcto ya que la validez de una inferencia no depende de los contenidos significativos de los términos que constituyen las proposiciones, sino de la forma de las proposiciones. Entonces la contradicción no es de Zenón sino de quien supone la divisibilidad infinita, pues él sólo se limita a sacar la consecuencia.

El argumento de la carrera es como sigue:

> "Comenzando en el punto S un corredor no puede alcanzar la meta G excepto sobrepasando sucesivas mitades de la distancia, es decir, subintervalos de SG cada uno de ellos $SG/2^n$ (donde n es 1,2,3,...). Llamaremos a esas mitades sucesivas Z-intervalos y a cruzar una de ellas una Z-carrera. Entonces, el argumento viene a ser éste:
>
> [F1] para alcanzar G el corredor debe correr todos los Z-intervalos (hacer todas las Z-carreras).
>
> [F2] es imposible recorrer una infinitud de intervalos (hacer infinitamente muchas Z-carreras).
>
> [F3] por consiguiente, el corredor no puede alcanzar G.
>
> Por qué afirmaría Zenón F2? Probablemente porque hizo la siguiente suposición adicional:
>
> [F4] la culminación de una secuencia infinita de pasos en un intervalo finito de tiempo es lógicamente imposible.
>
> La refutación del argumento de Zenón se consigue demostrando que lo afirmado en F4 es falso.

Vlastos prosigue del siguiente modo: en apoyo de [F4] podría interpretarse que "culminar" la secuencia es (1) "realizar todos los pasos en la secuencia <u>incluyendo el último</u>". Pero es evidente que con esa definición una secuencia infinita completa como la Z-carrera (la cual no puede tener último miembro) sería una contradicción tan categórica como el cuadrado redondo. Debe definirse "completar" la secuencia como (2) "realizar todos los pasos de la secuencia" o (3) "alcanzar el punto cuando ningún paso en la secuencia queda por realizar no habiendo omitido alguno".

En vista de que culminar la secuencia al ser interpretado como en (1) da un resultado distinto de cuando se interpreta como en (2), es correcto pensar que (1) es distinto de (2), pero si comparamos estas frases encontramos que sus textos difieren en que (1) tiene, además de lo que tiene (2), la parte *incluyendo el último*, lo que sugiere que la diferencia significativa está dada por esta parte, pero no es cierto, ya que en (1) la expresión "incluyendo el último" sólo desempeña una función explicativa de lo dicho en la primera parte de la proposición; parece, por consiguiente, que existe ambigüedad en el término *todos*. No se trata entonces de interpretar "culminar" la secuencia como en (1) o como en (2), debido a que una y otra expresión, tal como se presentan, son idénticas, se trata de hacer explícitos los contenidos significativos de la palabra "todos". Y parece que en la frase (1) *todos* se entiende como un todo finito, mientras que para la frase (2) *todos* se entiende como un todo infinito. Tal vez conviene entender que Zenón da por sentado y sin discusión que una secuencia infinita de pasos no puede alcanzarse porque no concibe un conjunto determinado que sea sin embargo infinito, como lo expresó en su tercer argumento contra la pluralidad en el cual dice que si son tantos como son, entonces son finitos en número. Porqué Zenón hace esta asunción, lo hemos señalado al referirnos a esa dificultad. Allí se hizo notar que Zenón no concibe la determinación de un *todo* de otro modo que a partir de la determinación de sus partes, lo que es equivalente a la definición extensional de los conjuntos.

Bien visto el dilema de Zenón, si tomamos la presentación que hace Vlastos, no necesitamos pasar a F4; es suficiente responder a la pregunta ¿por qué asume Zenón F2? La respuesta es la que hemos indicado; ella puede expresarse en otras palabras, diciendo que si una clase -aquí la clase de todas las mitades, infinita por definición- se obtiene por enumeración de sus elementos constituyentes, entonces, cuando éstos se deban alcanzar uno a uno, si son infinitos no se alcanzarán y la clase no será determinada. Por eso, como lo indica Russell, al asignar la prioridad lógica a las partes respecto del todo dado por la clase, ésta última no puede definirse si es infinita.

Precisamente porque los presupuestos gnoseológicos de Zenón son distintos a los que están implícitos en la *teoría de las clases* y la teoría matemática del infinito, él no podía sino afirmar F2, y no existe ninguna falacia en la inferencia allí dada en F3. Incluso el argumento de Zenón es tautológico; él dice: una secuencia infinita de intervalos no puede alcanzarse por un número finito de pasos cuando un paso recorre un sólo intervalo. Pero Vlastos propone que debe refutarse la validez de esa inferencia y en realidad su afirmación se reduce a lo siguiente: una secuencia infinita de intervalos puede alcanzarse por un número infinito de pasos. Se trata de dos afirmaciones distintas e igualmente verdaderas, dadas las convenientes definiciones previas. En realidad no refuta la inferencia sino que no le concede la asunción que él llama F2; sin embargo, esta premisa no es otra cosa que la primera parte del primer argumento contra la pluralidad y, más estrictamente, podemos decir que esa premisa es el resultado de postular que la parte es menor que el todo del que es parte. Vlastos, consecuentemente, debía ocuparse de hacer ver que ese postulado, precisamente por ser postulado, no es lógicamente necesario y tampoco conveniente, antes de hacer intervenir otras definiciones tan necesitadas de justificación como aquél. Por lo demás, el postulado base de dichas definiciones es el de que la parte no tiene que ser menor que el todo, ya que al no introducirlo, ante cualquier clase infinita se podría señalar como contradictorio que la parte sea equinumerosa con el todo del que es parte.

Ahora bien, haciendo intervenir la noción moderna de infinito como lo no alcanzable por adición de 1, tampoco puede refutarse lo afirmado por Zenón sin hacer otras suposiciones adicionales, entre ellas la de un corredor ideal que corra, o bien eternamente, o bien en una ideal carrera cuya trayectoria se refiera a un conjunto de intervalos divisibles infinitamente en donde ningún "paso" sea siguiente de otro, ya que si se admite que una extensión como SG está constituida por infinitas mitades, éstas no pueden ser agotadas por un corredor que en cada caso adiciona una nueva mitad a las ya recorridas. Vlastos así lo entiende y por eso ha hecho notar que Zenón está usando el nombre de carrera en un sentido no usual y que ilustra luego de mostrar que, en efecto, tal como se diseña la aporía, no podía culminarse la carrera, porque se están pidiendo dos condiciones incompatibles. Para esto el autor señala que no se puede demostrar [F4] y habría que demostrar una proposición [F5] más débil, la cual, de todos modos, no permitiría afirmar [F2]. [F5] sería:

[F5] la culminación de una secuencia infinita de pasos (o estados) discretos en un intervalo de tiempo finito, es imposible para un <u>sistema de estados finitos</u> (es decir, para un sistema que en algún instante dado está en una de las *n* situaciones posibles, donde *n* es infinito).

Para ilustrar esta proposición nos dice: supóngase (1) un sistema que estuviera en un instante cualquiera en uno de dos estados *A, B* y que la ocurrencia de uno de ellos esté precedida inmediatamente por la ocurrencia del otro, y (2) que el sistema experimentara infinitos estados alternativos entre las 10:00 y las 10:01, *A* en la primera mitad del minuto, *B* en el siguiente cuarto del minuto, *A* de nuevo en el siguiente octavo del minuto, etc. Una contradicción emergería entonces: dado (1), el sistema tendría que estar en uno de los dos estados a las 10:01, digamos que sea en *A*. La ocurrencia de *A* requeriría como su inmediato predecesor una única ocurrencia de *B* antes de las 10:01. Pero, dado (2), esto sería imposible: ninguna ocurrencia de *B* antes de las 10:01 podría ser el inmediato predecesor de *A*, ya que cada ocurrencia estaría separada de la ocurrencia de *A* a las 10:01 por infinitas ocurrencias de *A* y *B*. Pero esto no ocurre al Z-corredor de Zenón, debido a que su progreso hacia G no constituye un sistema de estados finitos: el estado de estar en G (el G-estado) no mantendría la misma relación con el estado representado por el recorrer algún Z-intervalo (algún Z-estado) que alguna ocurrencia de *A* sostiene con alguna ocurrencia de *B* en (1). En el caso de (1) podemos contar siempre con un inmediato predecesor para cualquier estado dado. No ocurre así en el caso del Z-corredor donde (por hipótesis) el G-estado no tiene un Z-estado como inmediato predecesor. Por lo tanto la imposibilidad de la Z-carrera completa queda por probar.

Vlastos hace ver que el sistema contemplado en (1) no cubre al Z-corredor de Zenón ya que éste hace infinitas carreras, para mostrarlo así nos va a indicar el modo apropiado de entender esas infinitas carreras que haría un corredor, porque, en efecto, nadie disputaría que ningún corredor humano podría hacer infinitos movimientos físicos individuales. Nos dice Vlastos: ocurre que Zenón ha utilizado dos sentidos para la palabra “carrera”: su uso normal lo restringe a movimientos físicamente individuales, para cuyo caso un hombre que corre del punto *x* al punto *y* no ha hecho más que una carrera, pero Zenón ha dado también el nombre de carrera al hecho de correr el intervalo que nos parezca. Si al primer sentido lo denominamos *carreras-a* y al segundo *carreras-b*, veamos qué sucede: dado que podemos tomar tantos intervalos (contiguos) como queramos se sigue que la única carrera-a SG constituye tantas carreras-b (contiguas) como se quiera; así pues, puede decirse que es dos carreras-b (por ejemplo, el recorrido de los intervalos SM, MG) o un millón de carreras-b (es decir, el recorrido de un millón de segmentos contiguos SG, cada uno de los cuales es una millonésima de la longitud SG), o $\aleph$ *carreras-b* (por ejemplo, todos los Z-intervalos). Por lo tanto, que el corredor deba hacer infinitas Z-carreras no justifica F2, si se trata de carreras-b.

Siendo este el caso, ninguna dificultad habría en hacer todas las Z-carreras si se requiere para ello solamente hacer la única Z-carrera de S a G. Una buena manera de ilustrar que, en efecto, el corredor si alcanza una meta G sería demostrar que puede hacerse una carrera de S a G; pero precisamente esa parece ser la carrera que no han podido demostrarle a Zenón los que sostienen el movimiento y, según noticias históricas, al final de la discusión hacían como aquí Vlastos: corrían de S a G para probar que sí era posible la carrera, lo que equivale a comer un huevo entero para mostrar que se pueden comer infinitas partes de un huevo, tal como lo propone Vlastos. No puede acudirse a esta explicación dado que invoca la experiencia sensible y siendo ella lo que se pretende explicar, caeríamos en una circularidad.

De nuevo téngase presente que definir la carrera-a SG para implicar en ella las infinitas carreras-b, es una manera de invocar la prioridad lógica del todo respecto de las partes, como lo hemos señalado al referirnos a Russell. Pero así como esta suposición se apoya en un hábito mental o psicológico carente de fundamentación lógica, el otro supuesto de la prioridad lógica del todo respecto de las partes, tampoco puede usarse por la misma razón: es preciso fundarlo lógicamente de manera previa, para no incurrir en circularidad.

Por otra parte, parece que hablar de Z-carreras-b como constituyentes de la Z-carrera-a de S a G, remite a la dificultad de la pluralidad que hablaba de que si eran muchos resultaban con necesidad teniendo dimensión superior a cero, o igual a cero, y al ser infinitas y con extensión superior a cero, entonces producían una extensión infinita. Por consiguiente, parece que la única alternativa consiste en hacer intervenir la noción de *límite de una sucesión*, noción esta que presupone los conceptos discutidos, como *infinito*. En consecuencia, Vlastos cree que Zenón podría argüir aún para sus propósitos la imposibilidad de hacer todas las Z-carreras-b (las cuales no han de ser Z-intervalos que puedan saltarse), ya que si bien no son movimientos físicamente independientes no son tampoco ficciones arbitrarias, pues cada una de ellas representa un subsegmento determinado del movimiento físico del corredor; por tanto, todas juntas representan una verdadera descripción que cubre la totalidad de su carrera SG, dando cuenta de cada parte de ésta exclusivamente en términos de Z-carreras-a. Vlastos continúa, ¿cómo podría ser esto cuando (por construcción) cada Z-carrera termina cerca de G, y por lo tanto ninguna Z-carrera alcanza a G? ¿Cómo podría haber una verdadera descripción de un evento (la carrera de S a G representada solamente en términos de Z-carreras) cuya ocurrencia conlleva al cumplimiento de una condición (la de hacer una carrera que alcance a G), cuando la descripción conlleva el no cumplimiento de esa condición (dado que ninguna de las carreras que figuran en la descripción alcanza a G)? Zenón ha incurrido en una nueva asunción:

[F6] cualquier punto alcanzado corriendo debe haber sido alcanzado por una única carrera que alcance ese punto (es decir, que termine en o más allá de ese punto).

Esta asunción, dice Vlastos, es intuitivamente plausible, pero la debemos rechazar explicando que mientras sea una condición suficiente para alcanzar un punto mediante la carrera (la normal, la única que necesitamos considerar en la experiencia diaria), no es por ningún motivo una condición lógicamente necesaria: en la posición zenoniana del movimiento del corredor, él está en posición de hacer *n* Z-carreras, donde *n* puede hacerse tan grande como se quiera para que la diferencia entre SG y la sumatoria de las *n* Z-carreras sea menor que cualquier intervalo e arbitrariamente pequeño. Esto significa que él está en posición de cruzar un intervalo que es métricamente indistinguible de SG -una manera perfecta de alcanzar G sin haber cumplido con la asunción [F6].

Parece más adecuado decir que es intuitivamente plausible este argumento de Vlastos que el de Zenón contenido en [F6], ya que [F6] señala que alcanzar un punto implica alcanzarlo, mientras que Vlastos dice que alcanzar un punto implica aproximarse mucho a él. Es claro que "mucho" varía de un sujeto a otro. Esta última manera de ver el problema, muestra con claridad que la carrera de S a G no podría ser explicada sin apoyarnos en la noción matemática de *límite de una sucesión*; en nuestro caso G será el límite y la carrera puede explicarse diciendo que el corredor se acerca a G tanto como se quiera y para todos los efectos, tanto prácticos como matemáticos, tomaremos a G como el punto al cual llega el corredor.

Aquiles y la tortuga.

Si Aquiles comienza su carrera del punto S al punto *A*, la tortuga que comienza su carrera simultáneamente pero en el punto *A*, en el tiempo que Aquiles emplea para llegar a *A* ella llega a *B*. Si Aquiles emplea un tiempo *t* (digamos un minuto) para alcanzar *A* con una velocidad de 100 metros por minuto, entonces la tortuga con una velocidad *r* (digamos un metro por minuto) habrá recorrido *AB* = 1 metro. Ahora, en el tiempo *t'* que él emplea para recorrer *AB* (es decir, 1/100 minutos) ella recorrerá *BC* = 0.01 metros; así se obtiene la progresión indefinida indicada en la tabla siguiente:

Las Z-secuencias	Las Z-carreras		
	Carrera 1	Carrera 2	Carrera 3 …
Aquiles (la Z-A secuencia)	SA (=100 m)	AB (= 1 m)	BC (= 1/100 m)
La tortuga (las T-A secuencias)	AB (= 1 m)	BC (= 1/100 m)	CD (=1/10000m)
La secuencia temporal (igual para ambos)	t = 1 minuto	t'= 1/100minuto	t'' = 1/10000 min.

El argumento es como sigue:

[G1] Aquiles y la tortuga hacen Z-carreras contemporáneas (es decir, que su $n^{\text{ésima}}$ Z-carrera comienza y termina en el mismo instante [n = 1,2,...])

[G2] La $n^{\text{ésima}}$ Z-carrera de la tortuga y la $(n + 1)^{\text{ésima}}$ de Aquiles recorren idénticos Z-intervalos.

[G3] Aquiles alcanzará a la tortuga si y sólo si una Z-carrera de Aquiles y una Z-carrera de la tortuga alcanzan el mismo punto en el mismo instante.

[G4] Pero, dado [G2] al final de cualquier Z-carrera la tortuga estará un Z-intervalo adelante. Por lo tanto dado [G3],

[G5] Aquiles nunca la alcanzará.

Las Z-carreras son como antes carreras-b enmascaradas como carreras-a. Cuando no lo están, G1 y G2 son verdaderas por construcción y G4 es una consecuencia válida. Pero ¿se seguirá entonces G5? Obviamente no; a menos que [G3] estuviera también admitida. Esta ultraplausible premisa juega aquí el mismo papel que [F6] en la paradoja anterior y puede ser rechazada sobre las mismas bases: aunque verdadera en circunstancias ordinarias, no lo sería en las circunstancias extraordinarias postuladas por Zenón. Aquí existe un punto Q tal que los segmentos SQ y AQ son respectivamente los límites de la secuencia infinita de las sumas parciales de las Z-A series y de las Z-T series. Si Aquiles pudiera hacer la carrera SQ, la tortuga haría la carrera AQ en el mismo tiempo y sería alcanzada en Q. Restringiéndolas a Z-carreras, Zenón asegura que las carreras SQ y AQ no serán hechas, dado que ninguno de ellos hace una carrera que termine en Q. Aún así, la secuencia infinita de Z-carreras permitiría a cada uno de ellos aproximarse a Q dentro de cualquier estandar de aproximación deseable, y Aquiles tendría una manera perfecta de alcanzar la tortuga sin satisfacer G3.De esta refutación puede señalarse lo mismo que de la paradoja anterior, es decir, evidentemente Aquiles puede aproximarse a la tortuga tanto como se desee hasta estar a una distancia de ella tan pequeña que podamos despreciarla y asumir que la ha alcanzado. La verdad parece ser que si pretende alcanzarla en estricto sentido, deberá <u>saltar</u> al límite dado por el punto Q.

Como bien lo indica Vlastos, [G5] se seguirá de las premisas anteriores sólo si se admite [G3], y como [G3] en el fondo lo que predica es que alcanzar un punto implica llegar hasta él, parece estar justificado Zenón para admitirla y no sería correcto rechazar esa verdad y en su lugar asumir que alcanzar un punto implica aproximarse a él; si tanto [G3] como [F6] en la paradoja anterior deben ser rechazadas sobre la base de que son válidas en el ámbito del pensamiento pero no de lo real, entonces se está asumiendo que no puede medirse con el pensamiento lo que constituye lo real, es decir, se admite la inconmensurabilidad entre el Ser y el Pensar que desestabilizó el pitagorismo. Para superar esa inconmensurabilidad deberá redefinirse lo real en términos de una construcción conceptual, como lo indicamos anteriormente en los comentarios a Zafirópulo. En tal caso, a Zenón no habrá que recriminarle por ser falaz sino por su falta de delicadeza al señalar esa inconmensurabilidad que da paso al escepticismo, pues sus aporías constituyen esos contraejemplos.

Por otra parte, respecto al recurso de Vlastos en el que introduce una división de la noción de carreras -que dice implícitas en Zenón- en carreras-a y carreras-b, es de notar que dicha división se hace sobre la base de la experiencia que tenemos de una carrera. La noción de carrera, sin embargo, no parece ser sino una sola, con la cual se señala el paso de un punto a otro; dichos puntos a su vez son de una única naturaleza y no físicos y geométricos, pues tanto la noción de carrera como los puntos no son más que elementos conceptuales que usamos para describir lo que decimos real, y si no logran su cometido sencillamente habrá que rechazarlos; al hacer tal cosa, como lo indica Zafirópulo, cambiamos el concepto de realidad. Ante la insuficiencia de estas nociones para describir el movimiento, se introduce aquí una nueva noción bastante compleja porque trae implícita una indeterminación, esta noción es el *paso al límite* y parece constituir lo que hemos denominado una ruptura epistemológica, pues evidentemente implica un salto, aun cuando "muy corto", pero lo que objeta la inteligencia es el tener que saltar y no lo largo de éste. No parece ser otro el hecho central que mencionó la Diosa a Parménides y que quería sostener Zenón en sus argumentos, que del Ser lo más que se puede alcanzar es una aproximación.

La flecha:

[H1] la flecha no podrá moverse en el lugar en donde no está

[H2] pero tampoco puede moverse en el lugar que está

[H3] dado que éste es *un lugar igual a sí mismo*

[H4] y toda cosa está siempre en reposo cuando está en un *lugar igual a sí mismo*

[H5] pero la flecha en vuelo está siempre en el lugar donde está

[H6] por lo tanto estará siempre en reposo.

La premisa [H4] es el eje central del argumento. Puede asumir dos significaciones dependiendo de cómo leamos "cuando":

[H4i] toda cosa está siempre en reposo para cualquier intervalo durante el cual está en "un lugar igual a sí mismo"

[H4ii] cualquier cosa está siempre en reposo para cualquier instante (sin duración) en el cual está en "un lugar igual a sí mismo".

La segunda lectura es la que corresponde a la asunción de Zenón. Si pensamos en un verdadero instante de duración cero, será obvio que no podría estar moviéndose, no tendría tiempo para moverse. Y si la flecha no se está moviendo, no debe estar en reposo? Algunos afirman sin más: "sí". Afortunadamente tenemos los medios para corregir el error, por ejemplo, la fórmula $V = s/t$: dado que un cuerpo en reposo tiene una velocidad cero y cubre una distancia cero, debemos tener valores de cero para **V** y **s** para representar el estar el cuerpo en reposo. Pero sobre la hipótesis de que el cuerpo reposa en un instante de duración cero, **t** también tendría un valor cero, y entonces obtendríamos $v = 0/0$, lo cual es absurdo porque cero sobre cero es un símbolo aritmético sin significado. La única manera de obtener

$s/t = 0$ es asignar a t un valor mayor que cero, es decir, representar el cuerpo como estando en reposo durante algún intervalo temporal, aun cuando muy corto.

Aristóteles decía que ni el movimiento ni el reposo son posibles en el "ahora". La flecha está no moviéndose y en no-reposo en un instante de la misma manera que un punto es no-lineal y no-curvo. Lo dicho por Aristóteles podría suscitar la pregunta: ¿"Pero si la flecha no se mueve en ningún instante dado de su vuelo, cuándo y cómo se las arregla para moverse?" El cuándo puede responderse tajantemente por "durante algún intervalo que contenga el instante dado". Pero para el cómo se debe ir más a fondo, exponiendo el error de categoría que se esconde tras la pregunta; no se debe parar allí. Se debe explicar aún que mientras movimiento **para** un instante (es decir, **duración**) es un sin sentido, se le puede dar un excelente sentido a movimiento **en** un instante, tomando "velocidad en el instante *i*" para significar el límite de velocidades promedio durante intervalos convergentes en cero y siempre que contengan el instante *i*.

Hasta aquí, en resumen, la formulación y refutación que hace Vlastos del argumento de Zenón. Nuestra opinión al respecto es la siguiente: la lectura de la proposición [H4] en términos de [H4ii], permite una precisa ubicación de la discusión en torno a la noción del movimiento en el ámbito del análisis lingüístico del término. Si por movimiento se señala el cambio de posición de un objeto en un tiempo dado, ese fenómeno debe ser susceptible de descripción. Si durante un tiempo dado un cuerpo ha recorrido una distancia, durante la mitad de ese tiempo debió recorrer la mitad de esa distancia (partiendo de una situación sencilla en que la velocidad es uniforme) y de igual manera en la mitad de la mitad de ese tiempo debió recorrer la mitad de la mitad de la distancia, etc. Ese modo dicotómico de proceder Zenón no es distinto del modo humano de proceder en general en todas las ciencias, pues consiste en reducir lo complejo a elementos simples para garantizar su inteligencia, como lo propone Descartes en la regla V de sus *Reglas para la dirección del espíritu.* Así, la química tiene sus elementos químicos como últimos constituyentes de su materia objeto de estudio, la física tiene puntos e instantes, la lingüística, a su vez, tiene los constituyentes mínimos en semántica (semas), morfología (morfemas), etc. Cuando Zenón procediendo de ese modo encuentra resultados absurdos, lo que demuestra es el error que constituye la base de nuestro proceder inteligente. Qué sucede en el análisis que hace Zenón de la noción de movimiento? Mientras un intervalo de tiempo puede ser dividido, debe dividirse para encontrar el elemento último constituyente de lo que denominamos tiempo, y para que ese intervalo temporal no pueda ser dividido más tiene que ser de extensión cero; es pues en esa crucial circunstancia donde debe analizarse la noción de movimiento, pero nos encontramos con que allí la noción misma desaparece. Como si dijéramos: movimiento en un instante, que es donde puede analizarse, no existe, mientras que existe en donde no es susceptible de ser inteligido.

El contraejemplo que pone Vlastos con la fórmula $V = s/t$, no es lógicamente válido para refutar a Zenón porque precisamente lo que se está analizando es esa noción que se escribe $V = s/t$ y en el lenguaje corriente se dice *movimiento*, indicando cubrimiento por parte de un móvil de una distancia durante un tiempo; este recurso no es otro que el de traer en apoyo de una noción definida la definición de la noción; es como si dijéramos que movimiento es una definición que como tal no requiere más que ser afirmada. Eso Zenón no lo refuta; lo que refuta es la pretensión de describir con dicha noción un fenómeno empírico.

Se podría ver el argumento de Zenón como diciendo $V = s/t$ para $t = 0$ es una definición inadecuada para su propósito de descripción de lo real porque cuando tengamos divisibilidad temporal infinita es necesario llegar a $t = 0$.Por otra parte, es claro que no es correcto argüir que “la flecha está en no-movimiento y en no-reposo en un instante de la misma manera que un punto es no-lineal y no-curvo”; por lo demás no es del punto sino de la línea de lo que se predica el ser curvo o recto. Lineal no tiene como correlato curvo, del modo como movimiento tiene reposo como su correlato. Esto es tan claro que puede expresarse con plenitud de sentido que algo sea lineal y curvo, que es el caso de las líneas curvas, ya que lo lineal puede ser curvo o recto; mientras que carece de sentido decir que algo está en movimiento y está en reposo simultáneamente y según la misma relación. En este segundo caso se evidencia el carácter autocontradictorio de la frase, lo cual no ocurre más que porque la noción de movimiento es la contraria de la de reposo, lo que no se presenta en la primera frase ya que la noción de curvo es contraria a la de recta pero no a la de lineal.

El significado de la palabra movimiento no se obtiene por el significado de no-movimiento; es evidente que no-movimiento no tiene sentido sin tenerlo antes movimiento, ya que la partícula negativa sólo desempeña la función de negar ese significado que se presupone, el cual se obtiene por contrastación con la noción de reposo, habiendo sido definida esta última o bien verbalmente o bien de algún modo ostensivo. Por lo aquí señalado, es justo afirmar que si algo no se está moviendo es necesario que esté en reposo.

Lo que debe indicarse no es esa contraposición como injustificada, sino que si algo no tiene tiempo no es en estricto sentido.

Pero al desplazar la discusión a este hecho relativo a la necesidad de que los entes sean en el tiempo y en el espacio, de nuevo nos situamos en las paradojas anteriores, estrictamente en aquella que señalaba que si algo es múltiple entonces es tan pequeño que no es; o mejor, que si el Ser puede dividirse infinitamente se reduciría al No-Ser.

Respecto de la pregunta que indaga por "cuándo" y "cómo" un móvil se las arregla para moverse, no parece tampoco justificada la respuesta que dice Vlastos debe darse a "cuándo", ya que implica una indeterminación decir que durante algún intervalo que contiene el instante dado, justamente al preguntar "cuándo" se pretende obtener una respuesta que precise los límites del momento en que comienza a moverse el móvil.

La respuesta que ofrece Vlastos es tan poco informativa como la que indica que comienza a moverse en el instante en el cual comienza a moverse. La respuesta óptima debe ser aquella que señale estrictamente el espacio igual a sí mismo que el móvil está ocupando. Y en este punto estaremos cerca de los motivos que tuvo Kant para decir del tiempo que era una forma interna de la sensibilidad, por lo cual en el tiempo no podemos situar con todo rigor los objetos instantaneamente como parece poderse hacer en el espacio. Pero como la flecha no está en un instante extenso, no podemos señalarla. Debemos admitir que si la flecha es, no es pensable.

Cuando decimos conocer algo queremos indicar que diferenciamos con precisión ese objeto, es decir, podemos diferenciar lo que constituye parte de él de aquello que no le pertenece. Se necesita, como quería Descartes, la distinción. En el caso que aquí nos ocupa, a saber, cuál es el instante en que un móvil comienza a moverse, señalar un intervalo de muchos (infinitos) instantes en el cual está incluido aquél de nuestro interés, no puede tomarse como conocimiento de dicho instante porque no hay determinación precisa de él, sino aproximada, y ésta, por fuerte que sea, determina un intervalo que contiene un número infinito de instantes. Falta el carácter distinto.

Para responder al "cómo", Vlastos señala que se debe tomar "velocidad en el instante *i*" para significar el límite de velocidades promedio durante intervalos convergentes en cero y que siempre contengan *i*. Este instante *i* debe ser con duración, pero si es con duración no se trata de un instante, sino de un intervalo de muchos (infinitos) instantes, y si es sin duración estaríamos en el caso rechazado anteriormente por Vlastos en virtud del valor cero de *t* y se trataría de la velocidad de la flecha cuando *no es* enteramente.

La física actual le da la razón a Zenón. No explica el movimiento con instantes; define velocidad instantánea sólo por paso al límite:

Velocidad instantánea =

$$\underset{t \to 0}{Límite} \; \frac{v_t - v_{t_0}}{t - t_0}$$

$$t \neq t_o$$

En torno al argumento denominado del estadio, Vlastos no se ocupa de analizarlo detenidamente como los anteriores aquí reseñados, pues considera que la versión divulgada por Paul Tannery, Brochard, Ross y otros, no representa con seguridad lo que haya enunciado Zenón en ella. Según estos autores, se trataría de la postulación de indivisibles que paradójicamente serían divisibles al considerar el movimiento relativo. La ilustración de esta interpretación la hemos dado al tratar a Zafirópulo y a Russell; el primero lo expuso según Tannery, el segundo según Brochard.

Tomándolo de Aristóteles en la *Física* 239b 33 - 240a 17, nos lo presenta así: "Hay tres conjuntos de bloques... o tres bloques A.B.C. de igual longitud. El bloque A es estacionario y los bloques B y C se mueven fuera de A en direcciones opuestas a velocidades iguales. Se supone que encontramos una contradicción: B atravesará la distancia *s* en un tiempo dado *t*, y en la mitad de ese tiempo, t/2, donde t y t/2 son los tiempos que toma la punta que conduce a B para moverse pasando A y C respectivamente; "así se sigue, piensa él, que la mitad es igual a su duplo [que t/2 = t] (Aristóteles, Física 239b35).

Aristóteles y todos nuestros informantes antiguos entendieron esto como una (supuesta) paradoja del movimiento relativo. Aunque Eudemo piensa que es muy "tonta" y que su paralogismo "muy obvio", ni él ni nadie en la antigüedad dudaron -sobre esta o cualquier otra base- que provenía de Zenón".

Como indicamos antes, Vlastos no se ocupa del análisis de esta paradoja, pues al parecer la asume como Eudemo, y, dado que hemos hablado de ella en otros lugares y aquí se trata de seguir el análisis que hace Vlastos de cada argumento de Zenón, nada tenemos que agregar en torno a ella. Igualmente, respecto de las paradojas del lugar y de la semilla de mijo, Vlastos no se detiene a analizarlas, pues sólo las presenta haciendo ver sobre la del lugar, que no podía ser refutada siempre que con la noción de existencia se asociara la espacialidad como si lo existente fuera *lo ente*, en razón de lo cual Aristóteles al introducir que el Ser se predica de varias maneras puede obviar la dificultad planteada por Zenón precisando el sentido de Ser para lo que sea en cada caso el sujeto del juicio; y, en cuanto a la semilla de mijo, que antes hemos denominado de trigo, Vlastos considera que, en efecto, los eléatas tenían prejuicios respecto de los sentidos al no encontrar la frontera inferior para los sonidos, esa insensibilidad para lo subliminal le hacía valer como motivo de descrédito de los sentidos en relación con sus percepciones de lo que se encuentra por encima del limen. Curiosamente tampoco Vlastos relaciona este argumento de Zenón con la dificultad implicada en el cambio de cualidad debido a cambios de cantidad, lo cual, como lo hemos indicado en nuestros comentarios a Zafirópulo, constituye un hecho digno de explicación.

BIBLIOGRAFÍA

- Aristóteles. Obras completas. Madrid, Aguilar, 1967.
- ______ *Física*. Madrid, Editorial Gredos, 1995.
- ______ *Metafísica*, Madrid, Editorial Gredos, 1982.
- Brochard, N. « Les prétendus sophismes de Zénon d'Elée ». Revue de Metaphysique et de Morale, Vol. I.
- Bruno, Giordano. *Sobre el infinito universo y los mundos*. Traducción y notas de Ángel J. Cappelletti. Barcelona, ediciones Orbis, 1984.
- Bolzano, Bernard. *Las paradojas del infinito*. México, UNAM, 1991. Traducción del alemán de Luis Felipe Segura.
- Burnet. J. *Early Greek Philosophy* . 2º edición, Londres, 1908.
- Brunschvicg, León. *Las etapas de la filosofía matemática*. Buenos Aires, Editorial Lautaro, 1945.
- Campos, Alberto. *Introducción a la lógica y la geometría griegas anteriores a Euclides*. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, 1994.
- ______ *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, 1994.
- Cappelletti, Angel J. *Mitología y filosofía. Los presocráticos*. Madrid: Cincel, 1986.
- Colli, Giorgio. *Zenón de Elea*. Traducción de Miguel Morey. Editorial Sexto piso, México. 2006.
- Crombie, I.M. *Análisis de las doctrinas de Platón*. Madrid, Revista de Occidente, 1979.
- Cornford, Francis. *Platón y Parménides*. Madrid: Visor, 1989.
- Cherniss, Harold. *La crítica aristotélica a la filosofía presocrática*. México: Unam, 1991.
- Descartes. *El Mundo. Tratado de la luz*. Capítulo VII. Edición, introducción, traducción y notas de Salvio Turró. Madrid, Editorial Anthropos, 1989.

- Descartes. *Œuvres de Descartes*. Publiées par Charles Adam et Paul Tannery. Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 1996.
- Detienne, Marcel. *Las artimañas de la inteligencia*. La metis en la Grecia antigua. Madrid, Taurus, 1988.
- Albert Einstein. *Living philosophers*. Evanston. 1949.
- Farrington, Benjamín. *Ciencia y filosofía en la antigüedad*. Barcelona: Ariel, 1986.
- Frege, Gottlob. "Sobre el sentido y la denotación". En: *Semántica filosófica: problemas y discusiones*. Comp. de Thomas Moro Simpson. Buenos Aires, Siglo XXI, 1973.
- Gibson, B. «La géométrie de Descartes au point de vue de sa méthode ». Revue de Métaphysique et de Morale. Julio de 1896.
- Gigon Olof, Alfred. *Los orígenes de la filosofía griega : de Hesíodo a Parménides.* Madrid: Gredos, 1980.
- ______ *Problemas fundamentales de la filosofía antigua*. Buenos Aires: Fabril editora, 1962.
- Grenet, P. *Les origines de l'analogie philosophique dans les dialogues de Platón. Paris*, Boivin, 1948.
- Grünbaum, Adolf. «A consistent conception of the extended linear continuum as an aggregate of unextended elements". Philosophy of science. Vol. 19. 1952.
- Guthrie, William K. *Historia de la Filosofía griega*. Madrid, Gredos, 1984.
- ______ *Los filósofos griegos : de tales a Aristóteles*. México : F.C.E., 1990.
- Hermann Diels Y W. Kranz. *Die Fragmente der Vorsokratiker.* Berlín 1956.
- Heródoto. *Los nueve libros de la historia*. Editorial Cumbre, colección Los Clásicos, México, 1978.
- Kirk Geoffrey Stephen y J.E.Raven. *Los filósofos presocráticos: Historia crítica con la selección de textos*. Madrid: Gredos, 1981.
- Knorr, Wilbur Richard. *The ancient tradition of geometric problems.* Boston, 1986.
- Koyre , A. *Introducción a la lectura de Platón*. Madrid, 1985.

- H. D. P. Lee. *Zeno of Elea*. Cambridge University Press, 1936.
- Milhaud, Gaston. *Les philosophes géomètres de la Grèce. Platon et ses prédécesseurs*. (1900). New York. Arno Press. 1976.
- Mondolfo, Rodolfo. *El infinito en el pensamiento de la antigüedad clásica*. Buenos Aires : Imán, 1952.
- Morales Guerrero, Julio. "Estudio de los argumentos de Zenón de Elea". Bogotá: Universidad Nacional, 1987.
- Georges Noel. «Le mouvement et les arguments de Zénon d'Élée ». Revue de Métaphysique et de Morale, 1893, tome 1.
- Platón. Obras completas. Madrid, Aguilar, 1981.
- Henri Poincare. « Le continu mathématique ». Revue de Métaphysique et de Morale. Tome I, 1893 Pages 26-34.
- Robin, León. *El pensamiento griego y los orígenes del espíritu científico*. Barcelona : edición Cervantes, 1923.
- ______ *Platón*, Barcelona, 1972.
- Russell, B. *Los principios de la matemática*. Madrid, Aguilar, 1973.
- ______ "Nuestro conocimiento del mundo exterior como campo para el método científico en filosofía". En: Obras completas, Tomo II. Madrid, Aguilar, 1973.
- ______ "Sobre el denotar". *En: Semántica filosófica: problemas y discusiones*. Comp. de Thomas Moro Simpson. Siglo XXI, 1973.
- Tannery, Paul. *Pour l'histoire de la science helléne*. (1887) París, Editions Jacques Gabay. 1990.
- ______ *La géométrie grecque* (1887). Paris, éditions Jacques Gabay, 1988.
- Van Der Vaerden, Bartel Leenert. G*eometry and algebra in ancient civilizations*. Groningen (Holanda), 1954.
- Vernant, Jean. *Mito y pensamiento en la Grecia antigua*. Barcelona: Ariel, 1983.
- Vlastos, Gregory. "Zeno of Elea". The encyclopaedia of philosophy. Vol. 8. New york londres. The Mac Millan Company. 1967.

- Whitehead, Alfred North. *La organización del pensamiento*. UNAM: Centro de estudios filosóficos. Cuaderno No. 13. México. 1964.
- Zafiropulo, Jean. *L'École Éléate: Parménide- Zénon- Mélissos*. Paris, Société d'édition "Les Belles Lettres", 1950.
- ______ *Vox Zenonis*. París : Société d'édition "Les belles lettres", 1958.
- ______ *Apollo et Dionysos*. Société d'édition Les Belles Lettres, Paris, 1960.
- ______ *Anaxagore de Clazomène*. Les Belles lettres, Paris, 1948.

APENDICE*

Primera parte: LAS APORÍAS DE ZENÓN EN LA *FÍSICA* DE ARISTÓTELES

Aristóteles escribe (*Física* VI, 239b) téttareç d! eisì lógoi Zhnwnoç perì kinhsewç, es decir: “Los argumentos de Zenón sobre el movimiento son cuatro”. Entonces Aristóteles va a referir los cuatro argumentos al movimiento mismo, no al lenguaje que sirve para expresarlo. Hay así, en la base del planteamiento del Estagirita, un error de perspectiva que va a deformar irremediablemente toda su exposición.

---

* A continuación transcribo, de las obras de Jean Zafirópulo *Vox Zenonis* y *L'Ecole. Éleaté*, los fragmentos de Zenón en griego con el análisis crítico que hace de ellos Zafirópulo. En primer lugar las aporías de Zenón en la *Física* de Aristóteles que corresponden al apéndice I de su libro *Vox Zenonis*, en segundo lugar las de la *Física* de Simplicio como nos las presenta en *L'Ecole Éléate*, y he agregado las citas de pie de página con la enumeración que tienen esta última obra.

Él prosigue prw=toç o2 perì tou= mh> kinei=sqai dià tò próteron ei1ç tò h3misu (a1eì) dei=n a1fikésqai tò ferómenon h6 pròç tò téloç. Hemos agregado la palabra a1eì, pues sin ésta el argumento carece de sentido y por otro pasaje de la *Fìsica* (VI, 233a) la dicotomía debe llevarse al infinito. La omisión de la palabra a1eì debe ser imputada, probablemente, al estudiante de quien leemos las notas. Se puede traducir entonces: “En el primero de sus argumentos Zenón concluye la imposibilidad del movimiento del hecho que el móvil debe (siempre) pasar primero por la mitad (de la distancia) antes de llegar al final.”

De todos modos el argumento resulta falso, pues, si el tiempo es infinitamente divisible, se puede hacer corresponder siempre a la división infinita de la trayectoria una división infinita del tiempo. Los instantes corresponderán a los espacios recorridos y el atleta llegará al final del estadio. Sólo si el tiempo no es infinitamente divisible se hace imposible efectuar un número infinito de contactos en un tiempo finito y el atleta no terminaría la trayectoria a recorrer.

Más adelante el Estagirita escribe:

deúteroç o2 kaloúmenoç A1cilleúç é1sti d! ou=toç ó2ti tò bradúteron ou1 dépote katalefqh/setai qéon u2po tou= tacístou* é1mprosqen gàr a1nagkai=on e1lqei=n tò diw=kon, ó2qen w7mhse tò feu=gon, w2st! a1eí ti proécein a1nagkai=on tò bradúteron.

Es decir: “El segundo argumento de Zenón se denomina el de Aquiles. Helo aquí: el corredor más lento jamás será alcanzado por el corredor más rápido. Pues el perseguidor, con necesidad, primero debe llegar al punto de donde ha salido el que huye, de suerte que siempre el más lento se encuentra adelante alguna distancia”. La relación que se establece aquí es correcta, presuponiendo la divisibilidad infinita del tiempo y del espacio, noción familiar al *Liceo* que enseñaba el dogma de la continuidad, pero el argumento de Zenón no opera más que si las unidades infinitamente pequeñas se conservan discretas.

Más abajo Aristóteles escribe:

trítoç o8i h2o13tòç feroménh é1sthken.

Es decir: "El tercer argumento es que la flecha, mientras se está moviendo, permanece estacionaria". Si el Estagirita presenta este tercer argumento de manera un poco lapidaria, es porque, como él mismo lo indica, ya había hablado de él al comienzo del parágrafo. En efecto, se lee allí:

ei1gàr h1emei=pan= h6kinei=ai, h1emei=d! ó2an h=katà tò í1on, é1sti d! aèì tò ferómenon en1 tw=nun=, akínhton thn= feroménhn eín=ai oi1s tón. Aquí el alumno que toma las notas está completamente embrollado y la frase que le atribuye a Aristóteles no es fácil de comprender.

¿Qué quiere decir: ó2an h=katà tò í1on ?

Kranz (*Vorsokratiker*, ed. 1934, tomo 1, página 254, nota 1) agrega e2autw= después de i6on; esta expresión designaría entonces cualquier cosa que ocupara un espacio de las mismas dimensiones que ella. Es bien posible, pero ¿Cómo podría una cosa ocupar un espacio que no tuviera sus mismas dimensiones? Aristóteles no nos lo dice, y con razón. La idea se mantiene en todo caso confusa, lo mismo después de esta corrección, el razonamiento no se sigue, pues nada ata lógicamente katà to i6on a en1 tw=nun=. Por tanto Kranz propone suplir después de en1 tw=nun= las palabras pan= dè katà to> i6on en1 tw=nun=. Si, después de todas estas enmendaduras, se desea todavía la frase como se obtiene de Aristóteles, se puede traducir: "si todo debe estar siempre en reposo o en movimiento, si una cosa está en reposo cuando ocupa un espacio de las mismas dimensiones que ella, si lo que se mueve está siempre en un instante determinado, si todo lo que se encuentra en un espacio igual a sí mismo se encuentra en un instante determinado, entonces la flecha en movimiento está en reposo".

Porqué "lo que se encuentra en un espacio igual a sí mismo" se encuentra *ipso facto* "en un instante determinado" resulta un misterio, nada relaciona aquí el espacio y el tiempo.

Evidentemente se puede intentar sustituir nun= por "presente" en lugar de "instante determinado", a pesar de ou1 sungkeitai o2 crónos ek twn= nun= twn= adiairétwn donde nun=, ciertamente, quiere decir instante. Pero ¿Qué ganamos con esta sustitución? Parece que nada. El comienzo de la frase queda desprovisto de sentido: en un espacio absoluto todo está en reposo o en movimiento; es una verdad de Perogrullo. El argumento no tiene sentido más que si la flecha debe recorrer unidades espaciales determinadas durante tiempos infinitamente cortos. Lo que es imposible. Pero, tal como nos ha sido transmitido, el texto parece alterado más allá del punto en que razonablemente se puede esperar restablecerlo. El estudiante escribía mal bajo los dictados del maestro. La tontería que se presenta como el cuarto argumento de Zenón corrobora esta manera de ver. Antes de examinar el cuarto argumento, quizas sea de interés hacer notar que, si la aporía de la flecha fue transcrita a la machota por algún alumno, Aristóteles tampoco la había comprendido perfectamente, como se sigue de su refutación: ou1 gàr súnkeitai o2 kpónoç ek twn= nun= twn= adiairétwn, w8 per oud1! a6 llo mégeqoç oud1én. Es decir: "Pues no es verdad que el tiempo se compone de una acumulación de instantes, y eso no es verdad para ninguna otra dimensión". La refutación es perfecta y advertimos de paso que Aristóteles, probablemente sensible a la crítica de Zenón, como se aprecia, había adoptado la idea de la continuidad.

Se lee un poco más abajo: tétartoç d'o2 perì twn= en1 tv= stadív= kinouménwn ex1 en1antíaç i6 svn= og5kwn par! i5 souç, twn= mèn ap1 ò télouç tou= stadíou twn= d'ap1 ò mésou, i5 sw= tácei, en v 6 sumbaínein oi6 etai i5 son eín=ai crónon tv= diplasív= tòn h7 misun. Es decir: "El cuarto argumento es aquel que trata del movimiento en un estadio de tropas idénticas de soldados, yendo en sentidos contrarios. Los escuadrones son numéricamente iguales, los unos parten del extremo del estadio y los otros desde la mitad, con idéntica velocidad; Zenón pretende que de esto resulta que la mitad de un lapso de tiempo es igual a su doble."

Imposible comprender ! Si no tuviéramos más que ese texto a disposición, el argumento no sería fácil de restablecer, lo mismo cabe decir de la refutación de Aristóteles, la cual, tal como ha llegado hasta nosotros, no es menos precaria que la exposición de la aporía. En efecto, se lee en la *Física* 240a:

é1sti d! o2paralogismòç e1n tw=ª tò mèn parà kinoúmenon tò dè par! h1remou= tò í1son mégeqoç a1xiou= tw=ª í1swª tácei tòn ì1son férestai crónon.

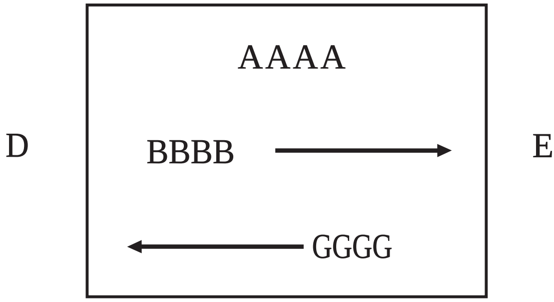
Es decir: “El paralogismo reside en esto: pretende que una magnitud igual, animada de una velocidad idéntica, se mueve en un tiempo igual de lento de lo que está en movimiento y de lo que está en reposo”. La refutación carece de sentido. Aristóteles, probablemente, ha debido decir: “recorre durante un tiempo igual longitudes iguales con relación a lo que está en movimiento y con relación a lo que está en reposo”. El alumno ha debido equivocarse de nuevo. Pero, así mismo, no se ve qué viene a hacer aquí la “velocidad idéntica”. El hecho es que el cuarto argumento de Zenón sólo con dificultad se traslada del lenguaje a la objetividad y el error de perspectiva cometido por Aristóteles al comienzo adquiere aquí todo su peso.

Afortunadamente Simplicio ha conservado la refutación de Eudemo y sobretodo un croquis que puso en Alejandro. Estos permiten reconstruir sin problemas el argumento original de Zenón que se ofrece muy claro desde que se lo refiera al lenguaje de los pitagóricos que el eléata deseaba atacar y no a la realidad que ese lenguaje tenía la pretensión de describir.

En efecto, se lee en Simplicio (Física 1019; 32):

o2 mèn où= lógoç tiou=óç e1stin eu1qéstatoç w5, w5ç fhsin Eú1hmoç, dià tò profanh=tòn paralogismòn é1cein* tà gàr a1n-tikinoúmena a1lh1loiç i1sotach=diplasían a1fístatai diástasin e1n tw=au1tw=crónwª e1n w=>tò parà h1remou= kinoúmenon tò h2misu diístatai ka6 i1sotacèç e1keínoiç h=ª

Es decir: “Este argumento es bastante simple, como dice Eudemo, porque el paralogismo que hay en él es muy visible. Los objetos yendo a la misma velocidad en sentido inverso, recorren en un mismo tiempo una distancia doble, mientras que el que se mueve con relación a un objeto inmóvil sólo recorre la mitad, igual si va con la misma velocidad”. Si se compara este texto con el croquis que Simplicio ha recopilado en Alejandro (Física, 1016, 14 sg.),



A og6koi e2tw=eç,

B og6koi kinouménoi a1pò tò D e1pì tò E,

G og6koi kinouménoi a1pò tò E e1pì tò D,

D a1ch>tou=stadíou,

E téloç tou=stadíou,

es evidente que Zenón había considerado dos tropas desplazándose a la misma velocidad en un estadio delante de otra fila de soldados inmóviles. Si las medidas del tiempo y del espacio son discontinuas por hipótesis, implican unidades mínimas. Para no recaer en el argumento precedente de “la flecha”, todos los movimientos corresponden necesariamente al paso de una unidad de espacio en una de tiempo, pues si se quiere pasar más de una, habrá un momento en que una tropa estará “entre” dos unidades de espacio. Ella volvería a la nada, lo que es contrario al principio *ex nihilo nihil*. Entonces, las unidades discontinuas de tiempo y espacio son inservibles.

Referido al lenguaje y no a una objetividad arbitraria, el argumento de Zenón, contrariamente a lo que creían Aristóteles y Eudemo, no contiene ningún paralogismo. Ellos no lo comprendieron, es todo.

APÉNDICE

Segunda parte: LAS APORÍAS DE ZENÓN DE ELEA EN LA *FÍSICA* DE SIMPLICIO

Por comodidad de nuestra exposición, examinaremos primero el fragmento número 1 en la colección de los *Fragmente der Vorsokratiker de Diels*[71] aun cuando en la *Física* de Simplicio figura después del tercero de Diels[72] .

La primera frase de este fragmento es: ei1dè e5tin, a1ágke e7aston mégeqóç ti e5ein kaì pácoç kaì a1pécein a1utou=tò e7eron a1pò tou=e2épou.

Este fragmento comienza por la hipótesis ei1dè e5tin. ¿Cuál es el sujeto de este e5tin? Dicho de otra manera, ¿de qué va Zenón a suponer la existencia? Simplicio se refiere a este pasaje del Eléata en dos lugares diferentes

71 Simplicio. *Física*, 140.34, D.29 BI. Ver Cap. II, nota 118.
72 Simplicio. *Física*, 140.27, D.29 B3. Ver nota 130.

de su escrito. La primera vez[73] parece dar por sujeto a este e5tin, el Ser, tò o5n; pero un examen atento del pasaje muestra que subsiste una duda al respecto. En efecto, Simplicio escribe prodeíxaç gàr o7i ei1mh>e5oi mégeqoç to>o5n, oud! a6n ei5n, ep1ágei ei1dè e5tin...k. t. l... es decir: “Después de haber demostrado que si el Ser no tiene dimensiones no existe, él (Zenón) prosigue, si existe, en efecto... etc...” Si se quiere considerar[74] las palabras ei1mh>e5oi mégeqoç to>o5n, ou1d a6n ei5n como si fueran de Zenón, entonces, con necesidad, la palabra ep1ágei corresponderá a una laguna, pues si la frase original de Zenón hubiera sido ei1mh>e5oi mégeqoç to>o5n, ou1d! a6n ei5n, eidè e5tin...k. t. l...no se ve por qué Simplicio habría utilizado el giro prodeíxaç... ep1ágei que no le es habitual y que presenta la desventaja de cortar inútilmente el texto que desea citar. Parece, pues, probable que las palabras ei1 mh>e5oi mégeqoç to>o5n, ou1d! a6n ei5n, o bien simplemente hacen parte del comentario de Simplicio, o bien, si son de Zenón, estando separadas de lo que sigue del texto por una frase que Simplicio no ha reproducido, permiten la introducción del término ep1ágei. Pero, ni en uno ni en otro caso, podemos ya tener la certeza de que to>o5n que es el sujeto de este primer e5oi y de este primer ei5n será todavía el sujeto del e5tin siguiente. Parece pues más prudente examinar el otro pasaje donde Simplicio se refiere a este texto de Zenón para resolver la cuestión.

Ahora bien, aquí[75] Simplicio indiscutiblemente da por sujeto a nuestro e5tin las palabras e7aston twn polwn. Siendo así que el comienzo del fragmento citado más arriba es eidè e5tin a1agkñ e7aston...k. t. l... entonces Zenón da explícitamente este mismo e7aston twn polwn como sujeto al segundo miembro de su frase. Parece poco lógico admitir que el primer miembro de la frase haya podido tener un sujeto diferente del segundo[76] y la construcción más racional consiste en asignar el con-

---

73 En las palabras que preceden inmediatamente este fragmento.
74 Como lo quería Diels.
75 Simplicio. Física. 139. 16. Ver Capítulo IV, nota 158.
76 Esto nos obliga a suprimir definitivamente del fragmento 1 de Diels, las palabras ei1. ei5n y a restituirlas a la paráfrasis de Simplicio, lo que parece más adecuado que querer ver en ellas un quinto fragmento auténtico del libro de Zenón. Ver nota 129.

junto al único sujeto expresado: ekZaston twFF polwFF. La traducción más natural del comienzo de nuestro fragmento será entonces:

> “En efecto si existe cada (unidad) tendrá necesariamente una cierta dimensión y cierto espesor y una parte de ella se encontrará a cierta distancia de otra parte”

Zenón prosigue kaì perì tou=prou5ontoç o2autlòç lógoç es decir: y el mismo razonamiento es válido para el prou3on. Dicho de otra manera, este prou3on tendrá necesariamente alguna dimensión y algún espesor y una parte de él se encontrará a cierta distancia de otro. Ahora bien, este prò-e5on es etimológicamente lo que se encuentra “adelante” de la parte de la unidad considerada en la primera frase del fragmento, porque en una hipótesis pluralista ekZaston twFF polwFF no puede significar sino “cada una de las unidades”. Es necesario entonces traducir:

> Y el mismo razonamiento se aplica a lo que está situado delante (de esta parte).

Que esto representa bien el pensamiento de Zenón queda demostrado por lo que sigue del fragmento: después de haber puesto su atención sobre una parte de la unidad, ahora va a considerar una parte de esta parte. kaì gàr elkeiFFo eXZei mègeqoç kaì proéxei autlou=ti dice él, es decir :

> Pues ésta en efecto tendrá una dimensión, luego una parte de esta estará situada delante.

Se requiere, en efecto, traducir aquí autlou=ti por “una parte de aquella” es decir “una parte del proécon ”, ya que si Zenón hubiera querido decir “y alguna cosa estará situada delante de este proécon”, habría escrito kaì ti autlou=proéxei o mejor kaì proéxei ti autlou=Ahora bien, Zenón especifica que hace aquí el mismo razonamiento, o2autlòç lógoç que en la primera frase, luego la dimensión mencionada, mégeqoç, no puede de nuevo ser más que el espesor, pácoç, del que se ha tratado más arriba. Dicho de otro modo, Zenón no pretende que allí haya alguna cosa delante de la parte de la unidad que él considera, sino que esta parte contiene a su turno una parte última poseyendo también un espesor[77].

Zenón prosigue: oi7oion dè tou=to a5pax te ei1pein= kaì aei1 légein· Es decir:

Ahora, decir esto una vez conduce a repetirlo indefinidamente.

En otras palabras, tan lejos como situemos nuestra operación, encontraremos siempre “una parte situada adelante” (proécon), poseyendo un espesor (pácoç). Avanzando en la unidad (que es por definición nuestra última realidad), llegaremos a su superficie. Zenón pretende que si esta superficie existe, ella debe tener un espesor (pácoç), pues contendrá a su turno un proécon, que será limitado por una superficie y así hasta el infinito[78].

Zenón explicita su pensamiento en estos términos: oudèn gàr autou= toiouton e5scaton e5stai ou5te e7teron pròç e7teron ouk e5stai· Aquí autou= se refiere al e7kaston del comienzo del fragmento y entonces se requiere traducir:

> Pues en ella (en esta unidad) ninguna de estas (partes) será última y siempre será posible oponer una de esas partes a otra.

Dicho de otra manera, es imposible llegar a una superficie final, puesto que siempre será posible oponer las dos caras de la que estemos considerando, caras que constituyen *ipso facto* dos nuevas superficies.

Subrayemos que este razonamiento supone la infinita divisibilidad del espacio que no concuerda con la definición dada de unidades últimas. La palabra

---

77 Ver nota 120 y capítulo IV, nota 161.

78 Platón simplemente ha invertido este razonamiento de Zenón en su *Parménides* (165 a-b) cuando dice que no se puede, por el espíritu (tñ= dianoìj), separar ciertas partes de un objeto para distinguir en él una masa (o5gkoç) que ocupara el centro de dicho objeto, pues se podría igualmente encontrar el centro del centro y así *ad infinitum*. Ver nota 127.

“medida” está entonces mal definida respecto a la palabra “unidad”. He aquí por qué el lenguaje empleado permite demostrar un absurdo. Esto prueba lo mal fundado o sobre todo la incoherencia de las definiciones sostenidas por la escuela de Crotona, blanco de la polémica emprendida por los defensores de Parménides.

Y ahora Zenón concluye:

Ou7wç ei1pollá es1tin an1ágkh au1tá mikrá te ei1nai kaì megála* mikrà mèn ws3te mh>e5ein mégeqoç, megála dè ws3te a5peira ei1nai. La primera parte de esta conclusión no presenta ninguna dificultad:

> Porque si (las unidades) son numerosas, es necesario que sean a la vez pequeñas y grandes

luego pollà se refiere todavía a e7asta del comienzo del fragmento·

La segunda parte de la conclusión encierra, al contrario, un doble juego de palabras: Zenón va a jugar con los dos sentidos de la palabra ws3te que puede significar “por” o “hasta” y con los dos sentidos de la palabra a5peiron que puede significar “infinito” o, simplemente, siguiendo su etimología, “desprovisto de límite” en el sentido de “borroso”.

En efecto, escribiendo ws3te mh>e5ein mégetoç Zenón no ha querido dar a entender “pequeños para no tener dimensiones” y esto por dos razones: primero hemos visto[79] que el Eléata hacía uso de la concepción matemática de la medida, de manera que la pequeñez no le resultaba un obstáculo para la medida, luego, según su punto de vista, para la noción de dimensión, y no tenemos ninguna razón para suponerlo inconsecuente consigo mismo. Acaba de demostrar laboriosamente que tan lejos como llevemos la división siempre habrá un espesor (pácoç) que él mismo califica de dimensión

79 Ver nota 16.

(mégeqoç) de modo que no parece muy evidente la razón por la cual él habría de contradecirse unas palabras más adelante.

Para seguir aquí el razonamiento de Zenón es preciso recordar que era alumno de Parménides. Para él el Ser es continuo: una división al infinito no terminaría, a sus ojos, en la acumulación de una infinitud de unidades distintas y medibles, sino en la continuidad. Pues igual si se quisiera admitir la existencia de unidades, éstas no serían considerables sino cuando perdieran su individualidad por falta de dimensiones.[80] Por esta razón asignamos a w3te el sentido "hasta el punto que" y traduciremos mikrá w3te mh> e5ei mégeqoç por pequeñas hasta no tener *dimensiones*' es decir, al fondo hasta alcanzar la teoría eleática.

En cuanto a la frase final megála w3te a5peira ei1ai ella no puede querer decir "grandes hasta ser infinitas", ya que el razonamiento de Zenón no permite, como lo hemos visto[81], salir de los límites de una unidad última y no busca en ninguna parte probar su extensión necesaria. El Eléata no se refiere en ningún momento a lo infinitamente grande, que nada tiene que ver con su argumento presente, él solamente demuestra que al observar suficientemente de cerca la noción de límite material, dicho límite se desvanece. Por eso, una unidad, cualquiera que ella fuera, se aproximará indefinidamente a sus dimensiones sin nunca poder alcanzarlas[82]. Aquí a5peiron significa simplemente "desprovisto de límite" en el sentido de "no limitable con exactitud" y hay que cuidarse de no dejarse influir por la cercanía de la palabra megála que sugiere naturalmente la idea de lo infinitamente grande. Nada prueba, de otra parte, que esta vecindad no haya sido voluntaria: la prosa de Zenón constituía probablemente una serie de enigmas que debía desenmarañar su auditorio (pues sabemos que sus obras eran en general leídas por círculos de adeptos) y explicar las violentas antítesis, los juegos de palabras, los dobles sentidos, etc. Aquí, en suma, el Eléata quiere

80 Lo que no ocurre con las unidades infinitamente pequeñas, pero discretas, de la escuela de Crotona. Ver nota 88 y cap. IV nota 165.

81 Ver nota 116.

82 No se requiere, naturalmente, aquí exigir mucha precisión a la palabra "dimensión", pues la validez de la noción de dimensión ideal quedaría por probar en el caso considerado aquí por Zenón. Ver nota 125.

decir que las unidades últimas de los pitagóricos debieron conservar dimensiones apreciables a fin de encontrarlas desprovistas de límite, como viene de demostrarlo. Por esto es preciso traducir aquí w3te por “para” y no por “al punto que” como en el primer miembro de la frase· Traducimos entonces megála w3te a5peira ei1nai *por grandes para ser desprovistas de límites*[83].

Hemos analizado este fragmento en detalle para mostrar con qué esmero los argumentos de Zenón fueron construidos y presentados. El Eléata teje con puntadas finas. Basta cambiar el lugar de una palabra para modificar todo el edificio. Esperamos así haber justificado lo dicho antes[84] acerca de los lógoi transcritos por Aristóteles que, lamentablemente, parece que a veces trataba sus fuentes con una libertad excesiva.

Vamos ahora, de nuevo por comodidad para la exposición, a examinar el fragmento que aparece con el número tres en los *Vorsokratiker* de Diels[85].

La primera frase de este fragmento es Ei1 pollá e5stin, a1nágke tosau=ta ei1nai o3a e1stì kaì ou6e pleíona au1tw= ou5e e1láttona· Es decir: *Si existen muchas (unidades, de cosas) necesariamente hay tantas como hay, ni más ni menos.*

En otras palabras, la enumeración de una pluralidad terminará siempre en el mismo resultado cualquiera que sea la manera de hacerlo; el hecho de contar, sostiene Zenón, no puede cambiar el número de los objetos contados[86]. Por esta razón, continúa: ei1dè tosau=tá e5stin o3a e1stí peperasména a5n ei5· Es decir: *Si son tantas como son serán un número limitado.*

---

83 No se requiere, naturalmente, aquí exigir mucha precisión a la palabra “dimensión”, pues la validez de la noción de dimensión ideal quedaría por probar en el caso considerado aquí por Zenón. Ver nota 125.

84 Ver nota 85 [en el original de Zafirópulo, pág. 177]. En este libro ver pág. 16.

85 Simplicio. Física, 140. 27, Diels 29 B 3.

86 No podemos aceptar esta afirmación sin reserva, Zenón, probablemente hacía lo mismo. Él no expone aquí sus propias convicciones sino la u2póqesiç de sus adversarios. Ver notas 56 y 57.

Esto implica que el número permanece independiente del observador que cuenta y que la serie de los números naturales agota por hipótesis toda realidad. Conclusión perfectamente conforme con las concepciones pitagóricas que trata de refutar.

El fragmento continúa: ei1pollá e1stin, a5peira tà o5nta e1stín. Aquí Zenón juega de nuevo, como vamos a verlo, con los dos sentidos de la palabra a5peiron. De una parte lo opone al peperasménon de la frase precedente, dando para ella el sentido de infinito en número, pero al mismo tiempo quiere apelar al resultado adquirido precedentemente[87], a saber, que en una concepción pluralista, la noción de límite entre dos unidades consecutivas no podría ser explicada con todo rigor. Lo que sigue del texto, como se muestra más adelante, implica esta doble significación de la palabra a5peiroç y el juego de palabra en griego significa "si existe una pluralidad de unidades, estas unidades serán colectivamente infinitas en número e individualmente desprovistas de límite espacial." Como los sobreentendidos del texto, desafortunadamente, son intraducibles en francés, con la doble definición precedente de a5peiroç por delante, nos contentaremos con traducir nuestro pasaje por: *si existen muchas (cosas) lo que existe será sin límite*[88].

Que Zenón haya tenido esta doble significación a la vista resulta claramente del final del fragmento donde él se apoya primero en uno y después en el otro de los dos sentidos que pueden darse a la palabra a5peiron. Prosigue en efecto: ae1ì gàr e7tera metaxù twn o5ntwn e1stí, kaì pálin e1keínwn e7tera metaxú. Es decir: *pues hay siempre otros seres entre aquellos existentes y de nuevo otros entre éstos*. Este razonamiento requiere la atribución a (a5peiron) del sentido "desprovistos de límite espacial" que Zenón le ha dado en el fragmento que hemos examinado precedentemente. En efecto, arguye el Eléata, entre dos unidades espacialmente indeterminadas uno puede siempre insertar una superficie. Pero después de lo que hemos visto antes [89], ésta, para existir, deberá presentar dos caras, pues ella tendrá un pácoç y un proécon. Ella, a su vez, deviene entonces un objeto y entre

87 Ver nota 121.
88 Sin límite tanto cuantitativo como espacial.
89 Ver nota 117.

ella y la unidad pluralista originalmente considerada se podrá insertar una nueva superficie, por lo que el razonamiento inmediatamente anterior será de nuevo válido y así ad *infinitum*.

Por esta razón Zenón concluye kaì ou7wç a5peira tà o5nta e1stí. Es decir: *y así existe un número infinito de cosas* pues aquí a5peiroç se opone a peperasménoç de la frase anterior y tomado en el sentido de "infinito en número" cualifica la cantidad de estas "superficies-objetos" de las que uno puede insertar el número que desee entre dos unidades supuestas últimas en cualquier concepción discontinua.

Así la hipótesis pitagórica es probada doblemente absurda: primero, puesto que un espacio dado no puede agotarse a partir de un número finito de unidades y así una enumeración, que por definición tiene término, crece sin embargo necesariamente más allá de todo límite. Y enseguida porque cada unidad considerada nunca es susceptible de ser rigurosamente definida en el espacio. De donde, podemos conjeturar, Zenón concluía la necesidad de rechazar el sistema preconizado y sostenido por los adeptos de la escuela de Crotona.

Nos queda por examinar el tercer argumento relacionado por Simplicio, argumento que constituye el fragmento dos de la colección de los "*fragmente der Vorsokratiker*" de Diels[90]. De este fragmento Simplicio nos dice: en1 dh> toútwi deíknusin o7i ou3mhte mégetqoç mhte pácoç mhte og5koç mhqeíç e5stin, oud1 a6 ei5 touto, es decir que Zenón quiere demostrar aquí que lo que no tiene ni dimensiones ni masa no existe del todo. Como la cita del Eléata que hace Simplicio es particularmente incompleta, será útil recordar el resumen que nos ha dado nuestro comentarista, resumen que a grandes rasgos parece corresponder al contenido de nuestro fragmento.

Simplicio, lamentablemente, ha truncado su cita, quitándonos la primera mitad del razonamiento. Tal como lo poseemos el argumento empieza así: ei1gàr a5loi o5nti prosgénoito, oudèn a6 meixon

90 Simplicio. Fis.,139. 5, Diels 29 B 2.

poihséeien. Es decir: *pues si es agregado a otro ser no lo aumentará en nada.* La frase está visiblemente cortada. Nos falta el primer miembro donde Zenón debió definir las cualidades de esta "cualquier cosa" que agregada a alguna otra no la aumentaría en nada. Si tenemos en cuenta la nota de Simplicio, parece que podemos admitir que el Eléata debía comenzar por negar toda dimensión a esta entidad. Desde entonces se hace probable que nuestra cita deba estar precedida de alguna afirmación análoga a aquella que antecede el primer fragmento que hemos examinado[91]: ei1mh>e5oi mégeqoç tò o6 oud! a6 ei5. Esto, evidentemente, no constituye más que una simple conjetura, pero cualquiera que sea la manera en que se restituya el miembro de la frase faltante, conservaremos el resumen de Simplicio como guía y, en adelante, el sentido general de nuestro fragmento se mantendrá inalterado.

Zenón prosigue megéqouç gàr medenòç o5toç, prosgenoménou dé oudén oi6n te ei¢ mégeqoç ep1idou=ai* kaì ou7wç a6 h6h tò prosginómenon oudèn ei5. Es decir: *la adición de lo que no tiene dimensiones no puede hacer ganar nada desde el punto de vista de la dimensión. Y, según eso, lo que se ha agregado no era nada.* Si hemos subrayado que Simplicio nota expresamente que esta "cualquier cosa" privada de dimensiones no tiene pácoç y que, de otra parte, Zenón aplica particularmente esta palabra al espesor de las superficies[92], resulta difícil no ver en nuestro fragmento un ataque dirigido contra la escuela mencionada por Platón[93] y de la que Aristóteles[94] escribe: Ei1ì dé tineç oi2kaì pan=sw=a genhtòn poiou=i sunteqénteç kaì dialúonteç ei¢ ep1ípeda kaì ex1 ep1ipédwn.

No sabemos con exactitud quienes eran esta gente que construía los cuerpos mediante acumulación de superficies y los destruía retirando capas sucesivas, pero podemos conjeturar que debía ser alguna secta emparentada con los pitagóricos que construían las distancias por acumulación de puntos. La superficie unitaria representaba, en efecto, el paso siguiente a franquear por

91 Ver nota 115.
92 Ver notas III y siguientes.
93 Platón. *Timeo* 53 c. Ver nota 89.
94 Aristóteles. *Del Cielo*. III. I. 298 b 33. Ver nota 90.

los sostenedores de la discontinuidad de la escuela crotoniana y el argumento de Zenón, juntando las noticias de Platón y las de Aristóteles, permite entrever que ciertos sectarios habían franqueado ese paso.

De esta manera la táctica seguida por Zenón se aclara: después de haber refutado, en los dos fragmentos que acabamos de examinar, el fondo de la concepción del punto dimensional, ahora va a refutar la posibilidad de concebir una superficie espacial. Entonces, todo el edificio pitagórico se irá a tierra y nuestro Eléata habrá alcanzado su propósito.

Con esta finalidad él prosigue: ei1 dè a1poginoménou tò e7teron mhdèn e5latton e5stai mhdè au3 prosginoménou au1xhqésetai, dh=lon o7ti tò prosgenómenon ou1dèn h3n ou1dè tò a1poginómenon. Es decir: *pero además, si una sustracción no disminuye en nada una determinada magnitud ni una adición la aumenta, es evidente que lo que se había agregado era nada, no más que lo que se había sustraído*. Y así se evapora la entidad misma que se venía manipulando, conclusión que parece corroborar perfectamente nuestra suposición: a saber, que este argumento de Zenón estaba dirigido contra una nueva categoría de sostenedores de la discontinuidad: contra estos que construían el mundo amontonando superficies, mientras que los dos precedentes consideraban a aquellos que acumulaban los puntos.

Existe todavía un cuarto[95] fragmento auténtico de la obra de Zenón conservado por Diógenes[96]. Helo aquí: tò kinoúmenon ou5t! e1n w2= e5sti tópoi kinei=tai ou5t! e1n w2= mh> e5sti. Es decir: *un móvil no se mueve ni en el lugar que ocupa ni en el lugar que no ocupa*. Este fragmento, verosímilmente, proviene del tercer argumento de Zenón contra el movimiento, denominado "de la flecha[97]". Se encuentra en Epifanio[98] una versión análoga de este fragmento, versión un poco más larga que la original y puesta bajo la

---

95 El ensayo de Calogero, *Studi el Eleatismo* (1932), pág. 193-4, en donde se agrega un quinto (Simpl., Fis., 562. 3-6) ha sido refutado por K. Von Fritz, Gnomon, XIV, 1938, p. 104-5.

96 Diógenes, IX. 72, Diels 29 B 4. Ver nota 96.

97 Ver nota 96.

98 Ver H. D. P. Lee. *Zeno of Elea*. Cambridge University Press, 1936, 18. Ver cap. IV nota 86.

forma de un silogismo aristotélico. Este pequeño texto es un ejemplo interesante del trabajo al que se entregaban los doxógrafos.

Destacamos que este fragmento corresponde exactamente a lo que Platón nos refiere del "Palamedes Eléata[99]" que hacía aparecer los mismos objetos como estando en reposo y en movimiento (ménontá te au1Ԋkaì ferómena) pero no encontramos nada más acerca de Zenón.[100]

99 Platón. *Fedro*, 261 d-e.
100 Platón. *Parménides*, 156 c-d sigue más o menos el razonamiento de Zenón pero lo aplica al problema "reposo – movimiento".

Zenón de Elea y el Infinito

Se terminaron de imprimir
300 ejemplares
en marzo de 2012 en la Editorial
Universidad Nacional de Colombia.
En su composición se utilizó fuente
Perpetua 11/12.5 puntos, en formato
de 14 x 21,5 centímetros.
Su carátula va en propalcote
de 240 gramos y las páginas interiores
en propalibros de 70 gramos.
Bogotá, D. C., Colombia